

---

**EVOLUÇÃO TEMPORAL**  
**DE UM SISTEMA SPINORIAL**

*Juliana Rita Fleitas*

---

# Evolução temporal de um sistema spinorial

---

Juliana Rita Fleitas

Orientador: Prof. Dr. José Bellandi Filho

Tese apresentada ao Instituto de Física *Gleb Wataghin*

para obtenção do título de Mestre em Física

*Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida  
pela estudante Juliana Rita Fleitas e aprovada pela comissão  
julgardora* *J. Bellandi*

Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia

Campinas, 15 de Fevereiro de 1996

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

F628e      Fleitas , Juliana Rita  
Evolução temporal de um sistema spinorial /  
Juliana Rita Fleitas. - -    Campinas, SP:  
[s.n.], 1996.

Orientador: José Bellandi Filho  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual  
de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Neutrinos Solares. 2. Spinor - Análise. 3.  
Física Matemática. I. Bellandi Filho, José. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de  
Física "Gleb Wataghin". III. Título.



INSTITUTO DE FÍSICA  
GLEB WATAGHIN

**PARECER DE APROVAÇÃO**

**DEFESA DE TESE DE MESTRADO DE**

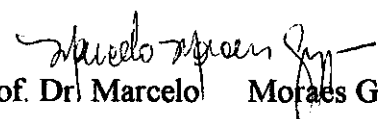
***JULIANA RITA FLEITAS***

DATA: 15 / 02 / 96

BANCA EXAMINADORA:

  
- Prof. Dr. José Bellandi Filho (Orientador)

  
- Prof. Dr. Veríssimo Manoel de Aquino

  
- Prof. Dr. Marcelo Moraes Guzzo

# Banca Examinadora

- Prof. Dr. José Bellandi Filho (Orientador) - IFGW/UNICAMP
- Prof. Dr. Marcelo de Moraes Guzzo - IFGW/UNICAMP
- Prof. Dr. Veríssimo Manoel de Aquino - UEL
- Prof. Dr. Roberto José Maria Covolan - IFGW/UNICAMP (Suplente)
- Prof. Dr. Antônio Bráz de Pádua - UEL (Suplente)

*aos meus pais,  
por ensinar-me a lutar  
por um objetivo...*

# Agradecimentos

*Ao orientador, Prof. José Bellandi Filho, pela confiança, compreensão, auxílio e amizade nos bons momentos e também nos de incerteza.*

*Aos demais professores do departamento: Profa. Carola Dobrigkeit Chinellato, Prof. Gustavo A. T. F. da Costa, Prof. José Augusto Chinellato, Prof. Marcelo de Moraes Guzzo e Prof. Roberto J. M. Covolan pelas valiosas discussões e pelos incentivos nos momentos de desespero.*

*A Profa. Maria Carolina Nemes (UFMG) pela orientação e amizade em outra outra área tão distante, mas não menos bela. Também aos professores Prof. Antônio F. R. de Toledo Piza (IF/USP), Prof. José Fernando Perez (IF/USP), Prof. Marcus Aloísio Martinez Aguiar (IFGW/UNICAMP) e Prof. Walter Felipe Wreszinski (IF/USP) pelas discussões, colaborações e principalmente a amizade durante estes anos todos.*

*Ao pessoal do Grupo Teórico: Adriana L. de Godoi, Ary A. Perez, Jorge H. Colonia, José Montanha, Kesley Godinho, Luiz Américo de Carvalho, Mara S. Soares, Miriam Batista, Veríssimo M. de Aquino pela amizade sempre demonstrada.*

*Aos amigos Eliezer Batista (IFT), Hugo Luis Mariano (IME/USP), José Antônio da Silva Neto (IME/USP), Luis Eduardo Saltini (IF/USP) e Sérgio Magalhães (IF/USP) pelos bons momentos vividos durante a graduação e que perduraram em toda esta trajetória irregular que a vida nos proporciona. Aos amigos da PUCCAMP: Flávia R. Daraya, Giovane R. Ferreira, Guilherme J. Dantas, José Reinaldo da Silva, Maria Lúcia M. Madeira e Rui T. Lisboa pela compreensão nos momentos de mau humor e amizade que proporcionaram momentos memoráveis.*

*Ao Mário Castro por todos os "socorros" e sugestões.*

*Ao pessoal da Secretaria da Pós Graduação, Armando, Mácia e Maria Ignez principalmente pela paciência que sempre tiveram.*

*E também a todos aqueles que confiaram na minha pessoa, facilitando o retorno para a Física.*

Este trabalho foi realizado com o apoio financeiro da Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq) e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).



*(...) Se as digressões podem fornecer o conhecimento de novas verdades, e, uma vez que não somos obrigados a seguir um método fechado e rigoroso, e que somente nos reunimos por satisfação própria, o que nos impede de desviar-nos do assunto agora, para não perder aquelas informações que, talvez, passada a ocasião propícia, nunca mais apareçam ? Quem sabe, inclusive, se muitas vezes não se pode descobrir curiosidades mais belas que as conclusões buscadas a princípio ? (...)*

Galileu

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Representação matricial dos operadores exponenciais</b>	<b>3</b>
1.1 Representação Matricial . . . . .	3
1.1.1 O caso bidimensional . . . . .	7
1.1.2 O caso tridimensional . . . . .	8
1.2 Funções de Green . . . . .	8
1.2.1 O caso bidimensional . . . . .	9
1.2.2 O caso tridimensional . . . . .	10
<b>2 Evolução temporal de um spinor a duas componentes</b>	<b>13</b>
2.1 Sistema sem acoplamento . . . . .	14
2.2 Sistema com acoplamento . . . . .	15
2.3 Matriz de evolução temporal . . . . .	16
2.4 Ângulos de mixing . . . . .	19
2.5 Algumas particularidades do problema bidimensional . . . .	20
2.5.1 $h_{12} = h_{21} = A = \text{Cte}$ . . . . .	20
2.5.2 Comportamento das soluções com as frequências ca- racterísticas . . . . .	21
2.6 Diagonalização . . . . .	22
2.7 Caso Geral . . . . .	24
<b>3 Problema composto por dois hamiltonianos</b>	<b>26</b>
3.1 Solução Geral - sem simetria . . . . .	27

3.2	Solução Geral - com simetria . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Ressonâncias</b>	<b>33</b>
4.1	Solução através da fase estacionária . . . . .	34
4.2	O problema composto com influência da ressonância . . . .	36
<b>5</b>	<b>Aplicação</b>	<b>41</b>
5.1	Transições adiabáticas . . . . .	46
5.2	Transições Não Adiabáticas . . . . .	47
5.3	Influência do ponto de criação dos neutrinos . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Discussões Finais</b>	<b>62</b>

# Lista de Figuras

2.1	<i>Autovalores <math>\lambda_+</math> e <math>\lambda_-</math> em função de <math>h_{11} - h_{22}</math></i>	22
2.2	<i>Autovalores <math>\lambda_+ - \lambda_-</math> em função de <math>h_{11} - h_{22}</math></i>	23
2.3	<i><math>\sin 2\omega</math> em função de <math>h_{11} - h_{22}</math></i>	24
5.1	<i>Probabilidade de "Level Crossing"</i>	49
5.2	<i>Comportamento de <math>\sin 2\theta_m</math>, ( equação 5.33), para <math>\theta = 0.20</math> rad.</i>	50
5.3	<i>Comportamento de <math>\sin 2\theta_m</math>, ( equação 5.33), para <math>\theta = 0.50</math> rad.</i>	51
5.4	<i>Comportamento de <math>\sin^2 2\theta_m</math> para <math>\theta = 0.50</math> rad, variando-se o ponto de criação do neutrino.</i>	52
5.5	<i>Comportamento de <math>\sin^2 2\theta_m</math> para <math>\theta = 0.20</math> rad, variando-se o ponto de criação do neutrino.</i>	53
5.6	<i>Neutrinos criados no centro do Sol.</i>	54
5.7	<i>Neutrinos criados a <math>1/4</math> do raio do centro do Sol.</i>	54
5.8	<i>Neutrinos criados a <math>1/2</math> do raio do centro do Sol.</i>	55
5.9	<i>Neutrinos criados a <math>3/4</math> do raio do centro do Sol.</i>	55
5.10	<i>Ângulo de mixing no vácuo <math>\theta = 0.20</math> rad, para neutrino criado no centro do Sol.</i>	56
5.11	<i>Ângulo de mixing no vácuo <math>\theta = 0.08</math> rad., para neutrinos criados no centro do Sol</i>	56
5.12	<i>Ângulo de mixing no vácuo <math>\theta = 0.03</math> rad., para neutrinos criados no centro do Sol</i>	57
5.13	<i>Ângulo de mixing no vácuo <math>\theta = 0.01</math> rad., para neutrinos criados no centro do Sol</i>	57

5.14	<i>Probabilidade de Permanência levando-se em consideração a oscilação na matéria, para <math>\theta = 0.50</math> rad no vácuo e neutrinos criados no centro do Sol. . . . .</i>	58
5.15	<i>Probabilidade de Permanência levando-se em consideração a oscilação na matéria, para <math>\theta = 0.20</math> rad no vácuo e neutrinos criados a <math>1/4</math> do centro do Sol. . . . .</i>	58
5.16	<i>Probabilidade de Permanência utilizando-se a expressão de S. Petcov para <math>\theta = 0.50</math> rad no vácuo. . . . .</i>	59
5.17	<i>Probabilidade de Permanência utilizando-se a expressão de S. Petcov para <math>\theta = 0.20</math> rad no vácuo. . . . .</i>	60
5.18	<i>Probabilidade de Permanência utilizando-se a expressão de S. Petcov para <math>\theta = 0.08</math> rad no vácuo. . . . .</i>	60
5.19	<i>Probabilidade de Permanência utilizando-se a expressão de S. Petcov para <math>\theta = 0.03</math> rad no vácuo. . . . .</i>	61
5.20	<i>Probabilidade de Permanência utilizando-se a expressão de S. Petcov para <math>\theta = 0.01</math> rad no vácuo. . . . .</i>	61

# Lista de Tabelas

5.1	<i>Valores do campo de interação para densidades de elétrons e neutrons do Sol.</i>	46
5.2	<i>Valores para o campo de interação.</i>	51
5.3	<i>Valores mínimo para que o neutrino veja a ressonância.</i>	52

## Resumo

Discutimos neste trabalho as soluções para as equações de evolução temporal para um sistema acoplado bidimensional via função de Green, fazendo-se uma aplicação particular dos resultados para o problema de um sistema de dois neutrinos de sabores, quando sujeitos a interação com a matéria solar.

# Introdução

O objetivo deste trabalho é o estudo das soluções da equação de evolução temporal para sistemas bidimensionais acoplados. Uma forma elegante de se obter soluções para tais sistemas de equações diferenciais é por meio do operador de evolução temporal, isto é, via função de Green. Esse tratamento matemático, apesar de elegante, oferece uma dificuldade operacional que é a de se obter representações matriciais para os operadores exponenciais. Apresentamos aqui um método simples ( ref. [1] ) para se obter essas representações matriciais usando-se transformadas de Laplace, que de certa forma significa diagonalizar o sistema quando a hamiltoniana a que está sujeita o sistema for independente do tempo. Deduzimos essas representações matriciais para um sistema de  $n$  equações diferenciais acopladas e particularizamos as soluções para os casos bi e tridimensionais respectivamente. Uma vez obtidas as soluções, calculamos as funções de Green para sistemas com  $n = 2$  e  $n = 3$  sujeitos a uma hamiltoniana real e constante, cuja representação matricial é simétrica.

Com esse formalismo, pode-se introduzir ângulos de mistura, que nessas condições de matriz hamiltoniana real e simétrica, permite escrever a função de Green como uma rotação no  $SU(n)$ , para  $n = 2, 3$ , da função de Green para a hamiltoniana diagonalizada.

Determinada a função de Green para o caso  $n = 2$ , estudamos a evolução temporal de um sistema spinorial a duas componentes, determinando-se as matrizes cujos elementos determinam as amplitudes de transição entre os estados que caracterizam os spinores bidimensionais.

Quando a hamiltoniana tiver elementos que dependem do tempo, a solução para o sistema acoplado de equações de evolução temporal é mais complicada e requer o uso de expansionais cuja solução final depende fortemente das funções que definem os elementos da matriz hamiltoniana.

Observamos, no entanto, que se a hamiltoniana de interação permite o aparecimento de termos oscilantes, ocasionando grandes oscilações, a aproximação de fase estacionária permite obter soluções ressonantes para as equações de evolução



temporal.

Neste trabalho faz-se uma aplicação específica dessas soluções no estudo das transições ressonantes entre estados de dois neutrinos de sabores no contexto dos neutrinos de sabores ( cf. [17] ). Discutimos dessa forma as probabilidades de transição entre esses estados.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 1 apresentamos as derivações das representações matriciais para os operadores exponenciais e discutimos a derivação das funções de Green. No Capítulo 2 discutimos o estudo da evolução temporal de um spinor a duas componentes sujeito a uma hamiltoniana qualquer e no Capítulo 3 generalizamos a solução para o caso em que o sistema evolui no tempo sujeito a duas hamiltonianas. No Capítulo 4 fazemos um estudo de transições ressonantes.

A aplicação ao problema dos neutrinos solares é apresentada no Capítulo 5 e as discussões finais estão no Capítulo 6.

# Capítulo 1

## Representação matricial dos operadores exponenciais

Vamos apresentar um método simples de determinação de uma representação matricial para operadores exponenciais  $\exp[H_n]$  ( ref. [1] ), onde  $H_n$  é uma matriz  $n \times n$ . Vamos também discutir a representação matricial para o operador de evolução temporal,  $\exp[-iH_n(t - t_0)]$ , ou seja, a função de Green quando  $H_n$ , ( $n = 2, 3$ ) for uma hamiltoniana cuja representação matricial é uma matriz real, simétrica e constante.

### 1.1 Representação Matricial

As soluções de muitos problemas em Física envolvem a determinação de representações simples para o operador exponencial. Isto é uma consequência direta do fato de que equações de evolução temporal interessantes à Física apresentam este tipo de operador como solução formal ( refs. [2], [3], [4], [5] ). Mesmo sendo extremamente elegantes, os operadores exponenciais são, em geral, de difícil tratamento e representações simples devem ser encontradas.

Neste capítulo vamos mostrar um método simples para se obter a representação matricial do operador exponencial  $\exp[\Gamma_n]$ , onde  $\Gamma_n$  é uma matriz  $n \times n$ . Este tipo de questão é interessante especialmente na determinação do operador exponencial representando transformações de um grupo discreto. Como uma aplicação desta representação matricial vamos obter a função de Green para um sistema de duas e três equações de evolução temporal acopladas, quando  $\Gamma_n$  é uma matriz real, simétrica e constante. Este tipo de função de Green, é importante, por exemplo, na análise da evolução temporal de um sistema de neutrinos propagando-se na matéria ( refs. [3], [4], [5] ).

Em geral, uma matriz  $\Gamma_n$  de ordem  $n \times n$  pode ser expressa em uma base de matrizes que representam operadores da álgebra associada a um grupo discreto  $SU(n)$ . No caso de matrizes de segunda ordem de traço nulo, a base composta de matrizes de Pauli ( uma realização do  $SU(2)$  ) pode ser utilizada para este fim, enquanto para matrizes de terceira ordem, nós utilizamos as matrizes de Gell-Mann ( uma realização do  $SU(3)$  ). Note-se que do ponto de vista físico, não há perda de generalidade se assumirmos que  $Tr(\Gamma_n) = 0$  , pois qualquer matriz pode ser sempre decomposta na forma

$$\Gamma_n = \frac{1}{n}Tr(\Gamma_n)\mathbf{1} + (\Gamma_n - \frac{1}{n}Tr(\Gamma_n)\mathbf{1}), \quad (1.1)$$

onde  $\mathbf{1}$  é a matriz identidade de ordem  $n \times n$  , implicando no surgimento de um fator de fase irrelevante na solução das equações de evolução.

A determinação da representação matricial para o operador exponencial  $\exp[\Gamma_n]$  depende da álgebra associada aos operadores correspondentes do  $SU(n)$  . Uma matriz de segunda ordem  $\Gamma_2$ , de traço nulo, pode ser escrita como

$$\Gamma_2 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \sigma_i$$

onde os  $\alpha_i$  são números complexos, podendo ser trivialmente quadradas

$$\begin{aligned} [\Gamma_2]^2 &= \sum_i \alpha_i \alpha_i \mathbf{1} \\ &= \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} \end{aligned}$$

pois as matrizes de Pauli satisfazem à seguinte relação de anticomutação  $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$  . E portanto podemos obter que

$$\exp[\Gamma_2] = \cosh \sqrt{\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}} + \frac{\sinh \sqrt{\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}}}{\sqrt{\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}}} \Gamma_2 \quad (1.2)$$

No caso onde  $\Gamma_n$  é uma matriz de ordem três, as matrizes de Gell-Mann  $\Lambda_i$  podem ser utilizadas como sendo uma base conveniente. A regra de anti-comutação destas matrizes é expressa como

$$\{\Lambda_i, \Lambda_j\} = \frac{4}{3}\delta_{ij}\mathbf{1} + 2d_{ijk}\Lambda_k$$

onde  $d_{ijk}$  são as constantes de estrutura simétricas do grupo  $SU(3)$  . Portanto

$$\begin{aligned} [\Gamma_3(t)]^2 &= \left[ \sum_{i=1}^8 \alpha_i \Lambda_i \right]^2 \\ &= \frac{4}{3} \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} + 2 \sum \alpha_i \alpha_j d_{ijk} \Lambda_k \end{aligned} \quad (1.3)$$

que é uma superposição de elementos da base do  $SU(3)$  . Como consequência, a representação para  $\exp[\Gamma_3]$  não pode ser determinada de modo simples como no caso bidimensional. De fato, esta dificuldade pode ser encontrada em todos os casos onde  $\Gamma_n$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$  com  $n \geq 3$  .

Um modo conciso de se contornar tal problema consiste em observar que  $\exp[\Gamma_n]$  pode ser determinado a partir da solução formal para a seguinte equação spinorial

$$\frac{d}{dz} \Phi(z, z_0) = \Gamma_n \Phi(z, z_0) \quad (1.4)$$

para  $z \geq 0$  , onde  $\Phi(z)$  é um vetor coluna que definimos aqui como sendo um spinor de  $n$  componentes e  $\Gamma_n$  uma matriz geral de ordem  $n$  . A solução formal para a equação (1.3) é escrita como

$$\Phi(z, z_0) = \exp[z \cdot \Gamma_n] \Phi(z_0) \quad (1.5)$$

onde  $\Phi(z_0)$  é uma condição de contorno apropriada. Sem perda de generalidade podemos tomar  $\Phi(z_0) = \Phi(0)$  . Se for possível determinar a solução da (1.4) para  $z = 1$  , podemos obter a representação matricial para  $\exp[\Gamma_n]$  . De fato a solução para a equação (1.4) pode ser determinada usando a transformada de Laplace. Introduzindo  $\Psi(p) = \mathcal{L}[\Phi(z)]$  , podemos escrever a partir da (1.4):

$$p \cdot \mathcal{L}[\Phi(z)] - \Phi(0) = \Gamma_n \mathcal{L}[\Phi(z)]$$

$$p\Psi(p) - \Phi(0) = \Gamma_n \Psi(p) \quad (1.6)$$

Se definirmos  $\Theta(p) = p\mathbf{1} - \Gamma_n$  , uma matriz  $n \times n$  , e  $\Theta^{-1}$  a matriz inversa correspondente, então a (1.6) pode ser escrita como

$$\Psi(p) = \Theta^{-1} \Phi(0) \quad (1.7)$$

Para se encontrar a transformação inversa de Laplace, observe-se que é possível escrever

$$\Theta^{-1} = \frac{M(p)}{P_n(p)}$$

onde  $M(p)$  é uma matriz  $n \times n$  construída a partir dos menores determinantes de ordem  $(n-1)$  da matriz transposta da matriz  $\Theta$ , e  $P_n(p)$  é o polinômio característico de  $\Gamma_n$ , dado por

$$P_n(p) = \det[p\mathbf{1} - \Gamma_n].$$

É importante notar aqui que os elementos da matriz  $M(p)$  são polinômios de ordem  $k \leq n-1$ . Temos duas situações a analisar: quando as raízes de  $P_n(p)$  são simples, e quando existem raízes degeneradas.

1) Se as raízes de  $P_n(p)$  são simples:

Suponhamos que as raízes  $\lambda_i$  do polinômio característico são simples, ou seja, possuem multiplicidade algébrica unitária. Portanto, podemos escrever o polinômio característico como

$$P_n(p) = \prod_{i=1}^n (p - \lambda_i)$$

A transformação inversa de Laplace de  $\psi(p)$  é dada por ( ref. [6] )

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^n \frac{M(\lambda_i)}{P_i(p)} \exp[\lambda_i \cdot z] \Phi(0) \quad (1.8)$$

onde

$$P_i(p) = \frac{P_n(p)}{p - \lambda_i} \quad (1.9)$$

Comparando as equações (1.5) e (1.7), escrevemos a representação matricial para  $\exp[\Gamma_n]$  como

$$\exp[\Gamma_n] = \sum_{i=1}^n \frac{M(\lambda_i)}{P_i(p)} e^{\lambda_i} \quad (1.10)$$

2) Se as raízes de  $P_n(p)$  não são simples :

Suponhamos agora que o polinômio característico  $P_n(p)$  possui raízes com

multiplicidades algébricas  $n_k \geq 1$ , ou seja,  $P_n(p)$  tem raízes degeneradas. Neste caso, escrevemos o polinômio característico como

$$P_n(p) = \prod (p - \lambda_k)^{n_k}$$

com

$$\sum n_k = n$$

Encontramos ( ref. [6] ) a representação matricial para  $\exp[\Gamma_n]$  como sendo dada por

$$\exp[\Gamma_n] = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{n_k} \frac{\Phi_{kl}(\lambda_k)}{(n_k - l)!(l - 1)!} e^{\lambda_k} \quad (1.11)$$

onde  $\Phi_{kl}(p)$  é uma matriz de ordem  $n$ , cujos elementos são dados por

$$[\Phi_{kl}(p)]_{\alpha\beta} = \frac{d^{l-1}}{dp^{l-1}} \left[ \frac{M_{\alpha\beta}(p)}{P_k(p)} \right]$$

e

$$P_k(p) = \frac{P_n(p)}{(p - \lambda_k)^{n_k}}$$

O fato da matriz  $\Gamma_n$  ser tal que  $Tr(\Gamma_n) \neq 0$  implica que podemos decompô-la na forma da (1.1)

$$\Gamma_n = \frac{1}{n} Tr(\Gamma_n) \mathbf{1} + \left( \Gamma_n - \frac{1}{n} Tr(\Gamma_n) \right)$$

que pode ser utilizada para generalizar a (1.9) e (1.10).

### 1.1.1 O caso bidimensional

Para o caso bidimensional, as raízes  $\lambda_i$  do polinômio característico são raízes simples dadas por  $\lambda_i = \pm \sqrt{-\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}}$  e portanto é simples mostrar que (1.9) reproduz (1.2).

### 1.1.2 O caso tridimensional

Para o caso tridimensional, onde as matrizes  $\Gamma_3$  são tais que  $Tr(\Gamma_3) = 0$ , na álgebra do  $SU(3)$ , a matriz  $M(p)$  pode ser expandida da seguinte maneira

$$M(p) = p^2 \mathbf{1} + p\Gamma_3 + M_1 \quad (1.12)$$

onde  $M_1$  é uma matriz  $3 \times 3$  cujos elementos são construídos a partir dos menores determinantes de ordem dois dos elementos correspondentes da transposta da matriz  $\Gamma_3$ . As raízes do polinômio característico satisfazem as seguintes propriedades:

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 0 \quad (1.13)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\lambda_i^m}{P_i(p)} = \delta_{m,2} \quad (1.14)$$

para  $m = 0, 1, 2$  e  $P_i(p)$  é dado por (1.9). Se assumirmos que  $P_3(p)$  tem raízes  $\lambda_i$  simples, das equações (1.12) e (1.13), podemos escrever  $\exp[\Gamma_3]$  somente em termos de duas raízes:

$$\exp[\Gamma_3] = \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)] \left\{ \mathbf{1} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^2 \frac{\sinh\left(\lambda_i + \frac{\lambda_j}{2}\right)}{(\lambda_i - \lambda_j)\left(\lambda_i + \frac{\lambda_j}{2}\right)} e^{\left(\lambda_i + \frac{\lambda_j}{2}\right)} [\lambda_i^2 \mathbf{1} + \lambda_i \Gamma_3 + M_1] \right\} \quad (1.15)$$

## 1.2 Funções de Green

Uma aplicação importante desta representação matricial para o operador exponencial ocorre quando a equação (1.4) é um sistema de equações de evolução temporal acopladas. A solução é agora uma função de Green.

Utilizamos este resultado para obter a representação matricial para a função de Green, quando  $\Gamma_n$  é uma matriz real simétrica, não necessariamente de traço nulo. Por simplicidade, vamos apenas considerar os casos para  $n = 2$  e  $n = 3$ . A solução

da equação (1.4) dada por

$$G_n = \exp[-i\Gamma_n(t - t_0)]$$

Vamos analisar primeiro o caso bidimensional,  $n = 2$ .

### 1.2.1 O caso bidimensional

Para  $n = 2$  temos duas raízes  $\lambda_i$  não-degeneradas. A equação (1.10) pode ser utilizada também na situação onde  $Tr(\Gamma_2) \neq 0$ . Temos que a representação matricial para função de Green, tem seus elementos escritos como

1. elementos diagonais:

$$[G_2(t, t_0)]_{ii} = \sum_{m=1}^2 c_m (\lambda_m + \Gamma_{jj}) e^{-i\lambda_m(t-t_0)} \quad (1.16)$$

2. elementos não diagonais:

$$\begin{aligned} [G_2(t, t_0)]_{ij} &= [G_2(t, t_0)]_{ji} \\ &= - \sum_{m=1}^2 c_m \Gamma_{ij} e^{-i\lambda_m(t-t_0)} \end{aligned} \quad (1.17)$$

onde  $c_m = (\lambda_m - \lambda_n)^{-1}$ ,  $m \neq n$ , e  $m, n = 1, 2$ .

Observamos que as raízes  $\lambda_i$  são os autovalores da matriz  $\Gamma_2$  e a função de Green pode ser escrita como

$$G_2(t, t_0) = U \cdot M(t, t_0) \cdot U^{-1}$$

onde  $U$  é uma matriz unitária,  $U \cdot U^{-1} = 1$ , e  $M$  é uma matriz diagonal que representa a função de Green calculada através da base usual de auto-estados, que é dada por

$$(M)_{ij} = \exp[-i\lambda_i(t - t_0)] \delta_{ij}$$

A matriz  $U$  pode ser escrita simplesmente como uma rotação do  $SU(2)$ ,

$$U = \exp[i\omega\sigma_2]$$



onde  $\sigma_2$  é a matriz de Pauli e  $\omega$  é o ângulo de mixing. Em termos do ângulo de mixing, temos a seguinte representação matricial para  $G_2(t, t_0)$  :

1. elementos diagonais:

$$[G_2(t, t_0)]_{ii} = \sum_{m=1}^2 \frac{1}{2} \left[ 1 + (-1)^{m+i} \cos 2\omega \right] e^{-i\lambda_m(t-t_0)} \quad (1.18)$$

2. elementos não-diagonais:

$$\begin{aligned} [G_2(t, t_0)]_{ij} &= [G_2(t, t_0)]_{ji} \\ &= - \sum_{m=1}^2 \frac{1}{2} [(-1)^m \sin 2\omega] e^{-i\lambda_m(t-t_0)} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Se compararmos as equações ( 1.16 ) com ( 1.18 ) e as equações ( 1.17 ) com ( 1.19 ) , obtemos

$$\sin 2\omega = \frac{2\Gamma_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (1.20)$$

e

$$\cos 2\omega = \frac{\Gamma_{11} - \Gamma_{22}}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (1.21)$$

Devido às das propriedades das raízes  $\lambda_i$  do polinômio característico ( ref. [6] ), não há ambiguidade nesta definição de ângulo de mixing.

## 1.2.2 O caso tridimensional

Vamos supor agora que temos três auto-valores não degenerados da matriz  $\Gamma_3$  . A representação matricial para função de Green pode ser obtida a partir da equação (1.10) e é dada por

1. elementos diagonais:

$$[G_3(t, t_0)]_{ii} = \sum_{m=1}^3 c_m \left\{ (\lambda_m - \Gamma_{jj}) \cdot (\lambda_m - \Gamma_{kk}) - \Gamma_{jk}^2 \right\} e^{-i\lambda_m(t-t_0)} \quad (1.22)$$

2. elementos não diagonais:

$$[G_3(t, t_0)]_{ij} = [G_3(t, t_0)]_{ji}$$

$$= \sum_{m=1}^3 c_m \{ \Gamma_{ij} (\lambda_m - \Gamma_{jj}) - \Gamma_{ik} \Gamma_{jk} \} e^{-i\lambda_m(t-t_0)} \quad (1.23)$$

onde  $i, j, k = 1, 2, 3$  e  $c_m = [(\lambda_m - \lambda_i) \cdot (\lambda_m - \lambda_n)]^{-1}$ , com  $m \neq n \neq i$ , e  $m, n, i = 1, 2, 3$ .

Como no caso bi-dimensional, a função de Green pode ser escrita da seguinte maneira

$$G_3(t, t_0) = U \cdot M(t, t_0) \cdot U^{-1} \quad (1.24)$$

onde a matriz da função de Green  $M(t, t_0)$  é dada por

$$[M(t, t_0)]_{ij} = \exp[-i\lambda_i(t - t_0)] \delta_{ij}$$

$i, j = 1, 2, 3$ .

A matriz  $U$  pode ser escrita como rotações no  $SU(3)$  definindo-se três ângulos de mixing entre os estados. A matriz  $U$  pode ser escrita como

$$U = e^{i\psi\Lambda_7} e^{i\phi\Lambda_5} e^{i\omega\Lambda_2}$$

onde  $\Lambda_i$  são as matrizes Gell-Mann e  $\omega, \phi, \psi$  são os três ângulos de mixing. Se compararmos a solução na equação (1.24) com a solução dada pela equação (1.22) e com a equação (1.23), obtemos as seguintes expressões para os ângulos de mixing:

$$\sin^2 \phi = \frac{(\lambda_3 - h_{22})(\lambda_3 - h_{33}) - h_{23}^2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \quad (1.25)$$

$$\tan^2 \omega = \left( \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_3} \right) \left[ \frac{(\lambda_2 - h_{22})(\lambda_2 - h_{33}) - h_{23}^2}{(\lambda_1 - h_{22})(\lambda_1 - h_{33}) - h_{23}^2} \right] \quad (1.26)$$

$$\tan^2 \psi = \frac{(\lambda_3 - h_{11})(\lambda_3 - h_{33}) - h_{13}^2}{(\lambda_3 - h_{22})(\lambda_3 - h_{22}) - h_{12}^2} \quad (1.27)$$

Utilizando-se das propriedades das raízes reais do polinômio característico da matriz  $\Gamma_3$ , apesar do cálculo ser longo e tedioso, é fácil se mostrar que os segundos membros desta equação são positivos definidos.

Concluindo, obtivemos a representação matricial para o operador exponencial  $\exp[\Gamma_n]$ , onde  $\Gamma_n$  é uma matriz  $n \times n$  com traço nulo. Estes resultados reproduzem

a representação matricial para o operador exponencial  $\exp[\Gamma_n]$  no casos em que  $\Gamma_n$  é uma matriz  $2 \times 2$  e obtivemos ua relação simples para o caso tridimensional, bem como representações simples para as funções de Green quando  $\Gamma_n$  é uma matriz real e simétrica.

## Capítulo 2

# Evolução temporal de um spinor a duas componentes

No capítulo anterior apresentamos como se obtém a solução para a equação de evolução temporal para um sistema acoplado, quando a hamiltoniana é uma matriz cujos elementos não dependem do tempo.

Quando a hamiltoniana é dependente do tempo, a solução para o sistema acoplado não é simples de se obter, pois o operador de evolução temporal é um expansional, cujo cálculo das integrais múltiplas depende fortemente de como os elementos da matriz hamiltoniana dependem do tempo.

Neste capítulo vamos discutir a evolução temporal de um sistema acoplado a duas dimensões com a hamiltoniana dependente do tempo.

A equação de evolução temporal para um sistema acoplado é dada por

$$\begin{aligned}i \frac{d}{dt} \phi_1(t, t_o) &= h_{11}(t) \phi_1(t, t_o) + h_{12}(t) \phi_2(t, t_o) \\i \frac{d}{dt} \phi_2(t, t_o) &= h_{21}(t) \phi_1(t, t_o) + h_{22}(t) \phi_2(t, t_o)\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde os coeficientes  $h_{ij}$  são funções dependentes do tempo. De um modo geral, essas equações podem ser escritas na forma matricial

$$i \frac{d}{dt} \phi = H_2 \phi\tag{2.2}$$

onde  $\phi$  é um spinor a duas componentes

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

e  $H_2$  é uma matriz  $2 \times 2$  cujos elementos são os  $h_{ij}$ .

Sendo  $\phi(t_o)$  a condição de contorno para o sistema, a solução formal é dada

por

$$\phi(t) = \text{Exp} \left[ -i \int_{t_0}^t H(\zeta) d\zeta \right] \phi(t_0) \quad (2.3)$$

onde  $\text{Exp}$  significa uma soma de integrais múltiplas ordenadas (refs. [11] [12] ), definida como um expansional. Esse expansional, na verdade, define a função de Green para o sistema acoplado de equação diferenciais

$$G(t, t_0) = \text{Exp} \left[ -i \int_{t_0}^t H(\zeta) d\zeta \right] \quad (2.4)$$

O problema fundamental é se determinar a representação matricial para cada função de Green, mesmo no caso  $2 \times 2$  , quando  $H_2(t)$  pode ser expandida em termos das matrizes de Pauli, pois as integrais múltiplas dependerão das particulares funções que definem os elementos de  $H_2(t)$  .

Dessa forma, vamos discutir as soluções desse sistema acoplado de uma forma mais elementar antes de nos preocuparmos com a solução dada formalmente pela equação (2.3) .

## 2.1 Sistema sem acoplamento

Dizemos que um sistema não possui acoplamento, se o hamiltoniano que descreve o sistema possui os elementos anti-diagonais nulos, ou seja  $h_{12}(t) = h_{21}(t) = 0$ . Este sistema sem acoplamento é escrito em função das componentes do spinor  $\phi(t, t_0)$  como:

$$\begin{cases} i \frac{d}{dt} \phi_1(t, t_0) = h_{11}(t) \phi_1(t, t_0) \\ i \frac{d}{dt} \phi_2(t, t_0) = h_{22}(t) \phi_2(t, t_0) \end{cases}$$

Da teoria elementar de equações diferenciais ordinárias ( ref. [8] ), temos que as soluções são da forma

$$\phi_j(t, t_0) = \exp \left[ -i \int_{t_0}^t h_{jj}(\lambda) d\lambda \right] \phi_j(t_0), \quad j = 1, 2 \quad (2.5)$$

Esta última equação possui características de solução oscilante. Deste modo, podemos introduzir as frequências de oscilações

$$\omega_j(t) = \int_{t_0}^t h_{jj}(\lambda) d\lambda \quad (2.6)$$

que chamaremos aqui de frequências características do sistema. Consequentemente, reescrevemos as soluções (3.2) do sistema como

$$\begin{cases} \phi_1(t, t_0) = e^{-i\omega_1(t)} \phi_1(t_0) \\ \phi_2(t, t_0) = e^{-i\omega_2(t)} \phi_2(t_0) \end{cases} \quad (2.7)$$

## 2.2 Sistema com acoplamento

Vamos agora fazer um estudo detalhado do sistema acoplado, ou seja, com todos os elementos de  $H$  não nulos. A equação diferencial de evolução temporal para um sistema acoplado é dada por

$$\begin{cases} i \frac{d}{dt} \phi_1(t, t_0) = h_{11}(t) \phi_1(t, t_0) + h_{12}(t) \phi_2(t, t_0) \\ i \frac{d}{dt} \phi_2(t, t_0) = h_{21}(t) \phi_1(t, t_0) + h_{22}(t) \phi_2(t, t_0) \end{cases}$$

As soluções podem ser escritas na forma

$$\begin{cases} \phi_1(t, t_0) = e^{-i\omega_1(t)} \psi_1(t, t_0) \\ \phi_2(t, t_0) = e^{-i\omega_2(t)} \psi_2(t, t_0) \end{cases} \quad (2.8)$$

onde as funções  $\psi_1(t, t_0)$  e  $\psi_2(t, t_0)$  satisfazem ao sistema acoplado

$$\begin{cases} i \frac{d}{dt} \psi_1(t, t_0) = h_{12}(t) e^{iW(t)} \psi_2(t, t_0) \\ i \frac{d}{dt} \psi_2(t, t_0) = h_{21}(t) e^{-iW(t)} \psi_1(t, t_0) \end{cases} \quad (2.9)$$

e a função  $W(t)$  é definida como a frequência relativa entre as frequências características  $\omega_1(t)$  e  $\omega_2(t)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} W(t) &= \omega_1(t) - \omega_2(t) \\ &= \int_{t_0}^t (h_{11}(\lambda) - h_{22}(\lambda)) d\lambda \end{aligned} \quad (2.10)$$

Suponhamos agora que  $\omega_1(t) - \omega_2(t) = (\omega_1 - \omega_2)(t - t_0)$ , isto é, que as frequências características variem linearmente com o tempo. Neste caso,

$$\begin{aligned} W(t) &= \omega_1(t - t_0) - \omega_2(t - t_0) \\ &= (\omega_1 - \omega_2)(t - t_0) \\ &= \int_{t_0}^t (h_{11}(\lambda) - h_{22}(\lambda)) d\lambda \end{aligned}$$

ou seja, as funções  $h_{11}$  e  $h_{22}$  não possuem dependência temporal.

Tomando a expansão de  $H_2$  em termos da decomposição em matrizes de

Pauli, e supondo que  $h_{11}$  não depende do tempo, temos  $\omega_1(t) = h_{11}(t - t_0)$ . Como por hipótese supusemos que  $\omega_1(t) = \omega_1(t - t_0)$ , então  $\omega_1 = h_{11}$ . Com raciocínio análogo, obtemos também que  $\omega_2 = h_{22}$ . Portanto, a hamiltoniana pode ser escrita em termos das matrizes de Pauli na forma

$$\begin{aligned} H &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \mathbf{1} + h_{12} \sigma_+ + h_{21} \sigma_- + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \sigma_3 \\ &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \mathbf{1} + \frac{h_{12} + h_{21}}{2} \sigma_1 + i \frac{h_{12} - h_{21}}{2} \sigma_2 + i \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \sigma_3 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Se impormos que  $h_{12}$  e  $h_{21}$  não dependem do tempo, então substituindo-se esta última expressão na solução formal para a equação (2.3), obtém-se

$$\begin{aligned} \phi(t, t_0) &= \text{Exp}[-i \int_{t_0}^t H(\lambda) d\lambda] \phi(t_0) \\ &= \text{Exp}[-i \int_{t_0}^t (\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \mathbf{1} + x_j \sigma_j) dt] \phi(t_0) \\ &= e^{-i \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} (t - t_0)} e^{-i (x_j \sigma_j) (t - t_0)} \phi(0) \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde  $x_i$  são as componentes do seguinte vetor

$$\vec{x} = (\frac{h_{12} + h_{21}}{2}, i \frac{h_{12} - h_{21}}{2}, \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}) \quad (2.13)$$

e chamando de  $\omega = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$  temos:

$$\omega = \sqrt{h_{12} h_{21} + \frac{1}{4} (\omega_1 - \omega_2)^2} \quad (2.14)$$

Da álgebra das matrizes de Pauli, podemos reescrever a segunda exponencial da equação (2.12) como:

$$e^{-i (x_j \sigma_j) (t - t_0)} = \cos \omega (t - t_0) \mathbf{1} - i \frac{x_j \sigma_j}{\omega} \sin \omega (t - t_0) \quad (2.15)$$

Logo podemos escrever a equação (2.12) como sendo :

$$\phi(t, t_0) = e^{-i (\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}) (t - t_0)} \left[ \cos \omega (t - t_0) \mathbf{1} - i \frac{x_j \sigma_j}{\omega} \sin \omega (t - t_0) \right] \phi(t_0) \quad (2.16)$$

## 2.3 Matriz de evolução temporal

Uma vez obtida a solução da equação diferencial do sistema acoplado, necessitamos obter a matriz de evolução temporal, de modo a poder determinar as

probabilidades de transição entre os estados do spinor  $\phi(t, t_0)$ . Na expansão de  $H_2$  em função das matrizes de Pauli, o termo de fase  $\exp\left[-i\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)(t - t_0)\right]$  não contribui na determinação de tais probabilidades, sendo portanto irrelevante em nossa análise. Desprezando então este termo, e utilizando as propriedades do operador expansional ( ref. [10] ), desenvolvemos a solução formal da equação (2.2)

$$\begin{aligned}
 \text{Exp}\left[-i\int_{t_0}^t \sum_{i=1}^3 x_i(\lambda) \sigma_i d\lambda\right] &= \text{Exp}\left[-i\int_{t_0}^t (x_+ \sigma_+ + x_- \sigma_- + x_3 \sigma_3) d\lambda\right] \quad (2.17) \\
 &= \text{Exp}\left\{-i\int_{t_0}^t d\lambda \text{Exp}\left[-i\int_{\lambda}^t d\mu x_3 \sigma_3\right] (x_+ \sigma_+ + x_- \sigma_-) \cdot \right. \\
 &\quad \cdot \text{Exp}\left[-i\int_{\tau}^{\lambda} d\mu x_3 \sigma_3\right] \cdot \text{Exp}\left[-i\int_{t_0}^{\tau} d\lambda x_3 \sigma_3\right] \\
 &= \text{Exp}\left\{-i\int_{t_0}^t d\lambda e^{-i\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\lambda} (x_+ \sigma_+ + x_- \sigma_-) e^{i\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\lambda} \right\} \cdot \\
 &\quad \cdot e^{-i\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}(t - t_0)} \\
 &= e^{-i\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}(t - t_0)} \text{Exp}\left\{-i\int_{t_0}^t d\lambda [h_{12} e^{i(\omega_1 - \omega_2)\lambda} \sigma_+ + \right. \\
 &\quad \left. + h_{21} e^{-i(\omega_1 - \omega_2)\lambda} \sigma_-] d\lambda\right\}
 \end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}(t - t_0)} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}(t - t_0)} \end{pmatrix} \cdot e^{-i\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}(t - t_0)} = \begin{pmatrix} e^{-i\omega_1(t - t_0)} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_2(t - t_0)} \end{pmatrix}$$

Logo, toda a evolução temporal é determinada por:

$$\begin{aligned}
 T(t, t_0) &= \cos \omega(t - t_0) \mathbf{1} - i x_j \sigma_j \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\omega} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \omega(t - t_0) & 0 \\ 0 & \cos \omega(t - t_0) \end{pmatrix} - \\
 &\quad - i h_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\omega} + \\
 &\quad - i h_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\omega} - \\
 &\quad - i \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\omega} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \omega(t - t_0) - i \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2} \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\omega} & -i h_{12} \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\omega} \\ -i h_{21} \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\omega} & \cos \omega(t - t_0) + i \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\omega} \end{pmatrix} \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

É interessante ressaltar que, neste cálculo, a condição inicial  $T(t_0, t_0) = \mathbf{1}$  é obtida



de modo trivial.

A evolução temporal de qualquer sistema acoplado é portanto dada por

$$\begin{aligned}\phi(t, t_0) = & [\cos \omega(t - t_0) \mathbf{1} - ix_3 \sigma_3 \sin \omega(t - t_0)] \phi(t_0) + \\ & - \frac{i \sin \omega(t - t_0)}{\omega} [h_{12} \sigma_+ + h_{21} \sigma_-] \phi(t_0)\end{aligned}\quad (2.19)$$

Escrevendo esta última equação nas componentes do spinor  $\phi(t, t_0)$ ,

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_1(t, t_0) = [\cos \omega(t - t_0) \mathbf{1} - \frac{ix_3}{\omega} \sin \omega(t - t_0)] \phi_1(t_0) - i \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\omega} h_{12} \phi_2(t_0) \\ \phi_2(t, t_0) = -i \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\omega} h_{21} \phi_1(t_0) + [\cos \omega(t - t_0) \mathbf{1} + \frac{ix_3}{\omega} \sin \omega(t - t_0)] \phi_2(t_0) \end{cases}$$

Da matriz (2.18), pode-se obter as amplitudes de transição, que são dadas por

$$\begin{aligned}A_P^{(1 \rightarrow 1)}(t, t_0) &= \cos \omega(t - t_0) - i \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\omega} \\ A_P^{(2 \rightarrow 2)}(t, t_0) &= \cos \omega(t - t_0) + i \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\omega} \\ A_T^{(1 \rightarrow 2)}(t, t_0) &= -i h_{12} \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\omega} \\ A_T^{(2 \rightarrow 1)}(t, t_0) &= -i h_{21} \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\omega}\end{aligned}$$

E as respectivas probabilidades são dadas por:

$$P_P^{(1 \rightarrow 1)}(t, t_0) = \cos^2 \omega(t - t_0) + \left( \frac{x_3}{\omega} \right)^2 \sin^2 \omega(t - t_0) \quad (2.20)$$

$$P_T^{(1 \rightarrow 2)}(t, t_0) = h_{12}^2 \frac{\sin^2 \omega(t - t_0)}{(\omega_1 - \omega_2)^2 + h_{12} h_{21}} \quad (2.21)$$

$$P_P^{(2 \rightarrow 2)}(t, t_0) = \cos^2 \omega(t - t_0) + \left( \frac{x_3}{\omega} \right)^2 \sin^2 \omega(t - t_0) \quad (2.22)$$

$$P_T^{(2 \rightarrow 1)}(t, t_0) = h_{21}^2 \frac{\sin^2 \omega(t - t_0)}{(\omega_1 - \omega_2)^2 + h_{12} h_{21}} \quad (2.23)$$

onde  $P_T$  é a probabilidade de troca, e  $P_P$  é a probabilidade de permanência de estados. Note-se que, quando as frequências características são iguais:

$$\omega = \sqrt{h_{12} h_{21}}$$

$$\Rightarrow A_T(t) \propto \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\omega}$$

significando que  $h_{12}h_{21}$  define a largura da distribuição.

## 2.4 Ângulos de mixing

Vamos considerar que a matriz  $H_2$  é real e simétrica. Nessa condição podemos introduzir o ângulo de mixing para determinar as probabilidades de transição.

Como discutido na Capítulo 1, o ângulo de mixing é dado pela equação (1.22),

$$\sin 2\theta = \frac{2h_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

onde  $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{(h_{11} - h_{22})^2 + 4h_{12}^2}$ .

Dessa forma a matriz de evolução temporal pode ser escrita como

$$T(t, t_0) = \begin{pmatrix} \cos \omega(t - t_0) + i \cos 2\theta \sin \omega(t - t_0) & -i \sin 2\theta \sin \omega(t - t_0) \\ -i \sin 2\theta \sin \omega(t - t_0) & \cos \omega(t - t_0) - i \cos 2\theta \sin \omega(t - t_0) \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Portanto as amplitudes de troca e permanência, em termos dos ângulos de mixing, são respectivamente:

$$\begin{aligned} A_T^{(1 \rightarrow 2)}(t, t_0) &= i \sin 2\theta \sin \omega(t - t_0) \\ A_T^{(2 \rightarrow 1)}(t, t_0) &= A_T^{(1 \rightarrow 2)}(t, t_0) \\ A_P^{(1 \rightarrow 1)}(t, t_0) &= \cos \omega(t - t_0) + i \cos 2\theta \sin \omega(t - t_0) \\ A_P^{(2 \rightarrow 1)}(t, t_0) &= \cos \omega(t - t_0) - i \cos 2\theta \sin \omega(t - t_0) \end{aligned}$$

e as respectivas probabilidades:

$$P_T^{(1 \rightarrow 2)}(t, t_0) = \sin^2 2\theta \sin^2 \omega(t - t_0) \quad (2.25)$$

$$P_T^{(2 \rightarrow 1)}(t, t_0) = P_T^{(1 \rightarrow 2)}(t, t_0) \quad (2.26)$$

$$P_P^{(1 \rightarrow 1)}(t, t_0) = \cos^2 \omega(t - t_0) + \cos^2 2\theta \sin^2 \omega(t - t_0) \quad (2.27)$$

$$P_P^{(1 \rightarrow 1)}(t, t_0) = P_P^{(2 \rightarrow 2)}(t, t_0) \quad (2.28)$$

Observa-se que

$$P_T^{(1 \rightarrow 2)} + P_P^{(1 \rightarrow 1)} = 1$$

$$P_P^{(2 \rightarrow 2)} + P_T^{(2 \rightarrow 1)} = 1$$

## 2.5 Algumas particularidades do problema bidimensional

Analisemos agora alguns casos específicos da seção anterior.

### 2.5.1 $h_{12} = h_{21} = A = \text{Cte}$

Supondo que a matriz  $H$  possui elementos anti-diagonais iguais a uma constante  $A$ . As frequências características são:

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= \int_{t_0}^t h_{11} d\lambda \\ \omega_2(t) &= \int_{t_0}^t h_{22} d\lambda\end{aligned}$$

A solução é escrita como  $\phi(t, t_0) = e^{-i(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2})} e^{-i(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2})\sigma_3} \psi(t, t_0)$ , onde  $\psi$  satisfaz:

$$i \frac{d}{dt} \psi = A [e^{i(\omega_1 - \omega_2)} \sigma_+ + e^{-i(\omega_1 - \omega_2)} \sigma_-] \psi \quad (2.29)$$

onde a solução é dada por:

$$\psi(t, t_0) = \text{Exp}\{-iA \int_{t_0}^t [\phi(\lambda) \sigma_+ + \phi^*(\lambda) \sigma_-] d\lambda\} \psi(t_0) \quad (2.30)$$

$$\text{onde } \begin{cases} \phi(\lambda) = \exp[-i(\omega_1 - \omega_2)] \\ \omega_1 - \omega_2 = \int_{t_0}^{\lambda} (h_{11} - h_{22}) d\lambda_1 \end{cases}.$$

Suponhamos que  $h_{11}$  e  $h_{22}$  independem do tempo, temos:

$$\begin{aligned}\omega_1 - \omega_2 &= \int_0^{\lambda} (h_{11} - h_{22}) d\lambda_1 \\ &= (h_{11} - h_{22}) \int_0^{\lambda} d\lambda_1 \\ &= (h_{11} - h_{22}) \lambda\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \phi(\lambda) &= \exp[-i(\omega_1 - \omega_2)] \\ &= \exp[-i(h_{11} - h_{22})\lambda]\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \psi(t) = \text{Exp}[-iA \int_{t_0}^t (e^{-i(\hbar_{11}-\hbar_{22})\lambda} \sigma_+ + e^{i(\hbar_{11}-\hbar_{22})\lambda} \sigma_-) d\lambda] \phi(t_0)$$

Observemos que o primeiro fator de  $\phi(t, t_0)$  é diagonal, portanto todas as contribuições de troca dependem do cálculo do expansional, que pode ser identificado diretamente com a matriz de transição  $T(t, t_0)$ .

## 2.5.2 Comportamento das soluções com as frequências características

Das equações (2.20) a (2.23), vemos que as transições entre os estados dos spinores dependem fortemente da variação relativa das frequências características com o tempo quando a matriz é simétrica com elementos anti-diagonais constantes.

Se as frequências relativas forem tais que  $\omega_1(t) - \omega_2(t) = 0$ , a solução do sistema de equações é trivial e nesse caso a probabilidade de troca é simplesmente definida por

$$P_T \propto \frac{1}{A^2}$$

Se a frequência relativa  $W(t) = \omega_1(t) - \omega_2(t)$  variar muito rapidamente com o tempo, então o expansional dado na equação (2.17), tende a 1 pelo lema de Riemann-Lebesgue ( ref. [15] ) e conseqüentemente não há transições entre os estados do spinor:

$$P_T \longrightarrow 0$$

O expansional dará uma contribuição efetiva nesse caso se existirem fases estacionárias, ou seja

$$\frac{d}{dt} W(t) = 0$$

o que significa que  $\exists t_r, t_0 \leq t_r \leq t$  tal que

$$h_{11}(t_r) - h_{22}(t_r) = 0 \quad (2.31)$$

Vejamos quais são as conseqüências da existência dessa fase estacionária para as soluções do sistema acoplado.

## 2.6 Diagonalização

Vamos olhar o problema do ponto de vista estacionário, ou seja, que para cada instante  $t$ , podemos diagonalizar o sistema. Os autovalores podem ser determinados pelas raízes do polinômio característico da hamiltoniana  $H_2$ , soluções da seguinte equação

$$\lambda^2 - \lambda \text{Tr}(H) + \det(H) = 0 \quad (2.32)$$

onde  $\text{Tr}(H)$  é a função traço do hamiltoniano, e  $\det(H)$  é a função determinante. As soluções dessa equação são

$$\lambda_{\pm} = \frac{h_{11}(t) - h_{22}(t)}{2} \pm \Delta \quad (2.33)$$

onde

$$\Delta^2 = \left[ \frac{(h_{11}(t) - h_{22}(t))^2}{4} + h_{12}^2 \right]$$

Na figura (2.1) mostramos o comportamento dos autovalores  $\lambda_{\pm}$  com relação a diferença  $h_{11}(t) - h_{22}(t)$ .

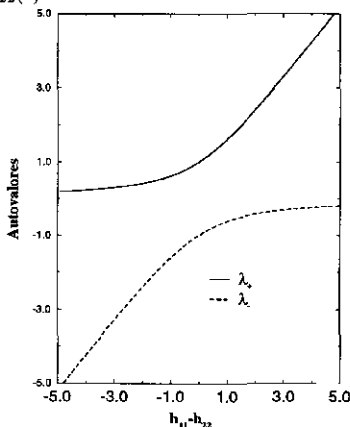


Figura 2.1: Autovalores  $\lambda_+$  e  $\lambda_-$  em função de  $h_{11} - h_{22}$ .

Uma simples análise da distância relativa entre os autovalores  $\lambda_+ - \lambda_- = 2\omega$ ,

nos mostra que o mínimo para essa distância ocorre quando

$$h_{11}(t) - h_{22}(t) = 0$$

ou seja, quando  $t = t_r$ , exatamente no ponto de fase estacionária, como mostrado na figura (2.2)

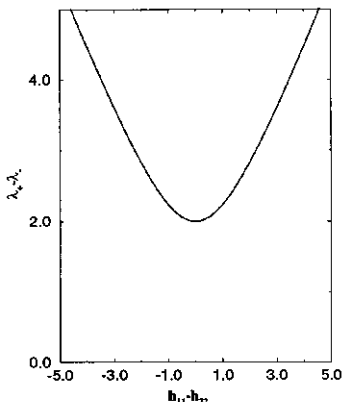


Figura 2.2: Autovalores  $\lambda_+ - \lambda_-$  em função de  $h_{11} - h_{22}$ .

Lembremos que no capítulo 1, vimos que numa situação em que a matriz era constante e simétrica, podíamos introduzir um ângulo de mistura definido pela relação

$$\sin 2\omega = \frac{2h_{12}}{\lambda_+ - \lambda_-}$$

Do ponto de vista estacionário, podemos escrever

$$\sin 2\omega(t) = \frac{2h_{12}}{\lambda_+(t) - \lambda_-(t)} \quad (2.34)$$

O comportamento de  $\sin 2\omega(t)$  com  $h_{11} - h_{22}$  está na figura (2.3), mostrando que o máximo ocorre para  $h_{11} - h_{22} = 0$ .

A existência de um ponto  $t_r$ , onde a distância relativa entre os autovalores é mínima, implica num máximo para o  $\sin 2\omega(t)$ . Ou seja,

$$\sin 2\omega(t_r) = 1$$

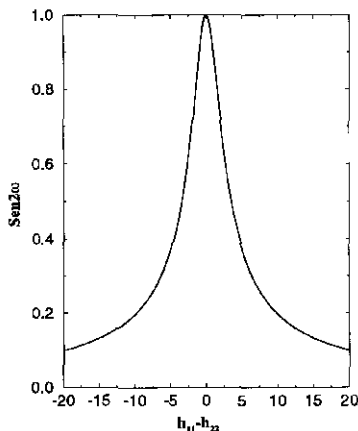


Figura 2.3:  $\sin 2\omega$  em função de  $h_{11} - h_{22}$ .

portanto, nessas condições

$$\omega(t_r) = \frac{\pi}{4} \quad (2.35)$$

Uma simples análise da função de Green determinada no Capítulo 1, que define a matriz de transição, permite concluir que, nessas condições ocorre a máxima mistura entre os estados do spinor.

De fato, usando-se a equação (1.17), tem-se que

$$G_{11}(t) = \cos^2 \theta_m e^{-i\lambda_1 \Delta t} + \sin^2 \theta_m e^{-i\lambda_2 \Delta t} \quad (2.36)$$

Note-se que  $\exp[-i\lambda_j \Delta t]$  são os auto-estados da hamiltoniana. Na condição de ressonância  $\theta_m = \pi/4$ , e a mistura entre os estados é portanto máxima.

Esse resultado é importante no sentido de que se pode estudar a evolução temporal de um sistema quando a frequência relativa do sistema, caracterizada como a diferença entre as frequências características, for grande, ocasionando grandes oscilações. Os pontos de fase estacionárias caracterizam a existência de ressonâncias, que permitem o estudo de transições entre os estados do spinor.

## 2.7 Caso Geral

No entanto, se a frequência relativa ocasiona simplesmente oscilações, a solução geral da equação de evolução temporal para tal sistema não pode ser simplificada.

Mais especificamente, a solução é dada pelo expansional.

$$\begin{aligned}\phi(t, t_o) = & e^{-i \int (t-t_o) x_o 1} \text{Exp} \left\{ -i \int_{t_o}^t (x_1(\lambda) \sigma_1 + \right. \\ & \left. + x_2(\lambda) \sigma_2 + x_3(\lambda) \sigma_3) d\lambda \right\} \phi(t_o)\end{aligned}\quad (2.37)$$

Utilizando a propriedade dos expansionais, temos

$$\begin{aligned}\phi(t, t_o) = & e^{-i \int (t-t_o) x_o 1} \text{Exp} \left\{ -i \int_{t_o}^t d\lambda \text{Exp} \left[ -i \int_{t_o}^t x_3(\lambda') \sigma_3 d\lambda' \right] (x_1(\lambda) \sigma_1 + \right. \\ & \left. + x_2(\lambda) \sigma_2) \text{Exp} \left[ -i \int_{\lambda}^{t_o} x_3(\lambda') d\lambda' \right] \right\} \cdot \text{Exp} \left[ -i \int_{t_o}^t x_3(\lambda') d\lambda' \right] \phi(t_o) \\ = & e^{-i \int (t-t_o) x_o 1} \text{Exp} \left[ -i \int_{t_o}^t d\lambda e^{i \int_{\lambda}^{t_o} x_3(\lambda') \sigma_3 d\lambda'} (x_1(\lambda) \sigma_1 + \right. \\ & \left. + x_2(\lambda) \sigma_2) e^{-i \int_{\lambda}^{t_o} x_3(\lambda') \sigma_3 d\lambda'} \right] e^{-i \int_{\lambda}^{t_o} x_3(\lambda') \sigma_3 d\lambda'} \phi(t_o)\end{aligned}\quad (2.38)$$

De modo usual, da expansão de  $H_2$  em matrizes de Pauli dada pela equação (2.11), podemos obter ainda

$$\begin{aligned}\phi(t, t_o) = & e^{-i \int (t-t_o) x_o 1} \text{Exp} \left[ -i \int_{t_o}^t d\lambda e^{i \int_{\lambda}^{t_o} x_3(\lambda') \sigma_3 d\lambda'} (h_{12}(\lambda) \sigma_+ + \right. \\ & \left. + h_{21}(\lambda) \sigma_-) e^{-i \int_{\lambda}^{t_o} x_3(\lambda') \sigma_3 d\lambda'} \right] e^{-i \int_{\lambda}^{t_o} x_3(\lambda') \sigma_3 d\lambda'} \phi(t_o)\end{aligned}\quad (2.39)$$

Assumindo a definição de frequência de oscilação dada pela equação (2.14)

$$\begin{aligned}\phi(t, t_o) = & e^{-i \int (t-t_o) x_o 1} \text{Exp} \left[ -i \int_{t_o}^t d\lambda e^{i(\omega_1(\lambda) - \omega_2(\lambda)) \sigma_3} (h_{12}(\lambda) \sigma_+ + \right. \\ & \left. + h_{21}(\lambda) \sigma_-) e^{-i(\omega_1(\lambda) - \omega_2(\lambda)) \sigma_3} \right] e^{-i(\omega_1(\lambda) - \omega_2(\lambda)) \sigma_3} \phi(t_o)\end{aligned}\quad (2.40)$$

Desta última equação, é claro que esta solução não possui uma simplificação factível numa situação genérica.



## Capítulo 3

# Problema composto por dois hamiltonianos

Neste capítulo vamos discutir a solução da equação diferencial quando o sistema evolui no tempo sujeito à ação de duas hamiltonianas

$$H(t) = \begin{cases} H_2^1(t) & 0 \leq t \leq t_c \\ H_2^2(t) & t > t_c \end{cases} \quad (3.1)$$

A forma mais simples de se discutir a evolução temporal nessa situação é via função de Green, como foi discutido no Capítulo 1. Assim,

$$\phi(t) = G(t, t_0) \phi(t_0) \quad (3.2)$$

com

$$G(t, t_0) = G_2(t, t_c) \cdot G_1(t_c, t_0) \quad (3.3)$$

onde os  $G_i$ ,  $i = 1, 2$ , são soluções das equações

$$i \frac{d}{dt} G_i(t, t') = H_2^i(t) G_i(t, t') \quad (3.4)$$

As soluções dessas equações são

$$G_i(t, t') = \text{Exp} \left[ -i \int_{t'}^t H_2^i(\lambda) d\lambda \right] \quad (3.5)$$

quando os  $H_2^i$  são funções do tempo, e

$$G_i(t, t') = \exp \left[ -i H_2^i(t - t') \right] \quad (3.6)$$

quando os  $H_2^i$  não são funções do tempo, com as condições de contorno

$$G_i(t, t) = \mathbf{1}$$

A representação matricial para cada função de Green pode ser obtida conforme os procedimentos descritos nos capítulos anteriores e dependem explicitamente dos elementos das matrizes  $H_2^i(t)$ .

Neste capítulo vamos nos limitar a discutir a evolução temporal desse sistema quando ambas as hamiltonianas forem matrizes  $2 \times 2$ , reais e não dependentes do tempo.

### 3.1 Solução Geral - sem simetria

Vamos considerar primeiramente a situação em que  $H_1$  e  $H_2$  são duas matrizes reais e quaisquer e constantes.

$$H_2^1 = \begin{pmatrix} h_{11}^1 & h_{12}^1 \\ h_{21}^1 & h_{22}^1 \end{pmatrix}, \quad H_2^2 = \begin{pmatrix} h_{11}^2 & h_{12}^2 \\ h_{21}^2 & h_{22}^2 \end{pmatrix}$$

Definindo

$$\vec{x}_1 = \left( \frac{h_{12}^1 + h_{21}^1}{2}, i \frac{h_{12}^1 - h_{21}^1}{2}, \frac{\omega_1^1 + \omega_2^1}{2} \right) \quad (3.7)$$

$$\vec{x}_2 = \left( \frac{h_{12}^2 + h_{21}^2}{2}, i \frac{h_{12}^2 - h_{21}^2}{2}, \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \right) \quad (3.8)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1} = \sqrt{h_{12}^1 h_{21}^1 + \frac{1}{4} (\omega_1^1 + \omega_2^1)^2} \quad (3.9)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_2} = \sqrt{h_{12}^2 h_{21}^2 + \frac{1}{4} (\omega_1^2 + \omega_2^2)^2} \quad (3.10)$$

onde

$$\omega_j^i(t) = \int_{t_0}^t h_{jj}^i(\zeta) d\zeta$$

$$\omega_j^2(t) = \int_{t_c}^t h_{jj}^2(\zeta) d\zeta$$

temos

$$G_1(t, t_0) = \exp \left[ -i \frac{\omega_1^1 + \omega_2^1}{2} \mathbf{1}(t - t_0) \right] \cdot \left[ \cos \omega_1(t - t_0) \mathbf{1} - i \frac{x_j^1 \sigma_j}{\omega_1} \sin \omega_1(t - t_0) \right] \quad (3.11)$$

$$G_2(t, t_c) = \exp \left[ -i \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \mathbf{1}(t - t_c) \right] \cdot \left[ \cos \omega_2(t - t_c) \mathbf{1} - i \frac{x_j^2 \sigma_j}{\omega_2} \sin \omega_2(t - t_c) \right] \quad (3.12)$$

Note que a continuidade de  $G_1(t_c, t_0)$  e  $G_2(t, t_c)$  em  $t = t_c$  é garantida pela função de Green.

Portanto, a matriz de evolução temporal  $T$ , é escrita como  $T = T_2 \circ T_1$ , onde

$$T_1(t_c, t_0) = \begin{pmatrix} \cos \omega_1(t_c - t_0) + i \frac{h_{11}^1 - h_{22}^1}{2} \sin \omega_1(t_c - t_0) & -i h_{12}^1 \sin \omega_1(t_c - t_0) \\ -i h_{21}^1 \sin \omega_1(t_c - t_0) & \cos \omega_1(t_c - t_0) - i \frac{h_{11}^1 - h_{22}^1}{2} \sin \omega_1(t_c - t_0) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$$T_2(t, t_c) = \begin{pmatrix} \cos \omega_2(t - t_c) + i \frac{h_{11}^2 - h_{22}^2}{2} \sin \omega_2(t - t_c) & -i h_{12}^2 \sin \omega_2(t - t_c) \\ -i h_{21}^2 \sin \omega_2(t - t_c) & \cos \omega_2(t - t_c) - i \frac{h_{11}^2 - h_{22}^2}{2} \sin \omega_2(t - t_c) \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

## 3.2 Solução Geral - com simetria

Vamos agora considerar o caso em que as matrizes são reais e simétricas.

Nessa condição dinâmica particular, a solução da equação de evolução temporal pode ser escrita em termos de ângulos de mixing, como discutido no Capítulo 1.

Sejam  $\lambda_{\pm}^i$  os autovalores das matrizes  $H_2^i$  e  $\theta_1$  e  $\theta_2$  os ângulos de mixing

definidos pela equação (1.19)

$$\sin 2\theta_1 = \frac{2h_{12}^1}{\lambda_+^1 - \lambda_-^1} \quad (3.15)$$

$$\sin 2\theta_2 = \frac{2h_{12}^2}{\lambda_+^2 - \lambda_-^2} \quad (3.16)$$

As funções de Green para cada região serão dadas por

$$G_1(t_c, t_0) = \exp[i\theta_1\sigma_2] \cdot M_1 \cdot \exp[-i\theta_1\sigma_2] \quad (3.17)$$

$$G_2(t, t_c) = \exp[i\theta_2\sigma_2] \cdot M_2 \cdot \exp[-i\theta_2\sigma_2] \quad (3.18)$$

com

$$[M_l]_{ij} = \exp[-i\lambda_k^l(t - t_0)] \delta_{ij} \quad (3.19)$$

Reescrevendo a matriz de evolução temporal em termos dos ângulos de mixing como:

$$T_1(t_c, t_0) = \begin{pmatrix} \cos \omega_1(t_c - t_0) + i \cos 2\theta_1 \sin \omega_1(t_c - t_0) & -i \sin 2\theta_1 \sin \omega_1(t_c - t_0) \\ -i \sin 2\theta_1 \sin \omega_1(t_c - t_0) & \cos \omega_1(t_c - t_0) - i \cos 2\theta_1 \sin \omega_1(t_c - t_0) \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

$$T_2(t, t_c) = \begin{pmatrix} \cos \omega_2(t - t_c) + i \cos 2\theta_2 \sin \omega_2(t - t_c) & -i \sin 2\theta_2 \sin \omega_2(t - t_c) \\ -i \sin 2\theta_2 \sin \omega_2(t - t_c) & \cos \omega_2(t - t_c) - i \cos 2\theta_2 \sin \omega_2(t - t_c) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Da matriz  $T$  de transição, para  $t \gg t_c$ , obtém-se, que as amplitudes de

transição são dadas por:

$$\begin{aligned}
A^{(1 \rightarrow 1)} &= (T)_{11} \\
&= (T_2)_{11}(T_1)_{11} + (T_2)_{12}(T_1)_{21} \\
A^{(1 \rightarrow 2)} &= (T)_{12} \\
&= (T_2)_{11}(T_1)_{12} + (T_2)_{12}(T_1)_{22} \\
A^{(2 \rightarrow 2)} &= (T)_{22} \\
&= (T_2)_{21}(T_1)_{12} + (T_2)_{22}(T_1)_{22} \\
A^{(2 \rightarrow 1)} &= (T)_{21} \\
&= (T_2)_{21}(T_1)_{11} + (T_2)_{22}(T_1)_{21}
\end{aligned}$$

E as probabilidades de transição são:

$$\begin{aligned}
P^{(1 \rightarrow 1)} &= |A^{(1 \rightarrow 1)}|^2 \\
P^{(1 \rightarrow 2)} &= |A^{(1 \rightarrow 2)}|^2 \\
P^{(2 \rightarrow 1)} &= |A^{(2 \rightarrow 1)}|^2 \\
P^{(2 \rightarrow 2)} &= |A^{(2 \rightarrow 2)}|^2
\end{aligned}$$

Vamos expressar nosso resultado em termos das seguintes probabilidades

$$P_{adiab}^{(1 \rightarrow 1)} = \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \quad (3.22)$$

$$P_{adiab}^{(1 \rightarrow 2)} = \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 \quad (3.23)$$

usadas por usadas por P.Pal ( ref. [17] ) para definir as transições adiabáticas.

### 1) Probabilidade de Permanência ( $1 \rightarrow 1$ )

$$\begin{aligned}
P_P^{(1 \rightarrow 1)} &= \cos^2(\theta_1 - \theta_2) P_{adiab}^{(1 \rightarrow 1)} + \sin^2(\theta_2 - \theta_1) P_{adiab}^{(1 \rightarrow 2)} + \\
&+ \frac{1}{2} \cos 2\theta_1 \sin 2\theta_2 \sin 2(\theta_2 - \theta_1) \cos 2\omega_2(t - t_c) + \\
&- \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \cos 2\theta_2 \sin 2(\theta_2 - \theta_1) \cos 2\omega_1(t_c - t_0) + \\
&+ \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1) \cdot \\
&\cdot \cos 2[\omega_2(t - t_c) + \omega_1(t_c - t_0)] + \\
&- \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 \sin^2(\theta_2 - \theta_1) \cdot \\
&\cdot \cos 2[\omega_2(t - t_c) - \omega_1(t_c - t_0)]
\end{aligned} \quad (3.24)$$

## 2) Probabilidade de Troca ( $1 \rightarrow 2$ )

$$\begin{aligned}
P_T^{(1 \rightarrow 2)} = & \cos^2(\theta_1 - \theta_2) P_{adiab}^{(1 \rightarrow 2)} + \sin^2(\theta_2 - \theta_1) P_{adiab}^{(1 \rightarrow 1)} + \\
& - \frac{1}{2} \cos 2\theta_1 \sin 2\theta_2 \sin 2(\theta_2 - \theta_1) \cos 2\omega_2(t - t_c) + \\
& + \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \cos 2\theta_2 \sin 2(\theta_2 - \theta_1) \cos 2\omega_1(t_c - t_0) + \\
& - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1) \cdot \\
& \cdot \cos 2[\omega_2(t - t_c) + \omega_1(t_c - t_0)] + \\
& + \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 \sin^2(\theta_2 - \theta_1) \cdot \\
& \cdot \cos 2[\omega_2(t - t_c) - \omega_1(t_c - t_0)]
\end{aligned} \tag{3.25}$$

É importante notar que

$$P_P^{(1 \rightarrow 1)} + P_T^{(1 \rightarrow 2)} = 1$$

Desprezando-se os termos oscilantes nessas expressões teremos:

### 1) Probabilidade de Permanência ( $1 \rightarrow 1$ )

$$P_P^{(1 \rightarrow 1)} = \cos^2(\theta_1 - \theta_2) P_{adiab}^{(1 \rightarrow 1)} + \sin^2(\theta_2 - \theta_1) P_{adiab}^{(1 \rightarrow 2)} \tag{3.26}$$

### 2) Probabilidade de Troca ( $1 \rightarrow 2$ )

$$P_T^{(1 \rightarrow 2)} = \cos^2(\theta_1 - \theta_2) P_{adiab}^{(1 \rightarrow 2)} + \sin^2(\theta_2 - \theta_1) P_{adiab}^{(1 \rightarrow 1)} \tag{3.27}$$

Essas expressões aqui deduzidas definem as probabilidades de permanência e de troca entre estados de spinores quando a evolução temporal do sistema se dá transicionando de uma região cuja dinâmica esta definida pela matriz  $H_2^1$  para a região de matriz  $H_2^2$ .

Quando se desprezam os termos oscilantes, note-se que a probabilidade de permanência dada pela equação (3.26) pode ser escrita na forma de uma composição clássica de probabilidades se definirmos uma probabilidade de "level crossing "

$$P_P^{(1 \rightarrow 1)} = (1 - X) P_P^{(1 \rightarrow 1)} + X P_T^{(1 \rightarrow 2)} \tag{3.28}$$

onde

$$X = \sin^2(\theta_1 - \theta_2)$$

Esse resultado, como veremos mais adiante, será importante para o estudo de probabilidades de transição ressonante entre dois estados de sabores de neutrinos.

# Capítulo 4

## Ressonâncias

Neste capítulo vamos continuar tratando a evolução temporal de um sistema acoplado sujeito a situação em que a dinâmica é definida por duas hamiltonianas.

Vamos considerar uma dinâmica particular definida da seguinte forma:

1. as duas hamiltonianas são reais e simétricas ;
2. os elementos da diagonal secundária das duas hamiltonianas são iguais e constantes ;
3. a hamiltoniana  $H_2^2$  é constante ;
4. a hamiltoniana  $H_2^1$  tem os elementos diagonais dependentes do tempo, tal que a frequência relativa provoca grandes oscilações, definindo fase estacionária e ocasionando a existência de ressonância.

Vamos supor ainda que na região da hamiltoniana  $H_2^1$  , uma vez criado o spinor que define o estado inicial , ele se propaga como se  $H_2^1$  fosse constante até a região de ressonância, ocasionando nessa região nova mistura de estados e depois se propagando livremente até transicionar para a região de  $H_2^2$  .

A evolução temporal desse sistema pode novamente ser descrita via função de Green. Vamos primeiramente considerar que a situação dinâmica é tal que na região de  $H_2^1$  existe somente um ponto de fase estacionária, portanto somente um ponto de ressonância.

Dessa forma, tem-se três regiões a serem consideradas:

1. região em que  $H_2^1$  pode ser considerado constante ;
2. região de ressonância e
3. região de  $H_2^2$  .



Assim

$$G(t, t_0) = G_2(t, t_{r+}) \cdot G_r(t_{r+}, t_{r-}) \cdot G_1(t_{r-}, t_0) \quad (4.1)$$

As funções de Green nas regiões 1 e 3 já foram determinadas na seção anterior. Vamos portanto, determinar a função de Green na região de ressonância.

## 4.1 Solução através da fase estacionária

Vamos supor que as frequências características são tais que, em dadas regiões, existam pontos de fase estacionária, ou seja,  $\exists t_r$  tal que

$$\frac{d}{dt} W(t)|_{t=t_r} = \frac{d}{dt} (\omega_1(t) - \omega_2(t))|_{t=t_r} = 0 \quad , \quad \frac{d^2}{dt^2} (\omega_1(t) - \omega_2(t))|_{t=t_r} < 0$$

Se houver mais que um ponto de fase estacionária, pode-se particionar o intervalo de domínio da função  $W$ , de modo que em cada intervalo, se tenha um único ponto de fase estacionária. Da propriedade do expansional ser uma função de Green (e portanto possuir propriedades de grupos), pode-se reconstruir o problema geral, uma vez resolvido para cada intervalo da partição realizada.

Utilizando a definição dada pela equação (2.10), e tomando a expansão em série em torno da ressonância  $t_r$  até primeira ordem, temos

$$\begin{aligned} \omega_1(t) - \omega_2(t) &\simeq \omega_1(t_r) - \omega_2(t_r) + \frac{d}{dt} W(t)|_{t=t_r} \\ &\approx \omega_1(t_r) - \omega_2(t_r) \end{aligned}$$

Na situação descrita na subseção (2.5.1), analisamos o caso onde  $h_{12} = h_{21} = A = Cte$ .

A partir da equação (2.40), e utilizando uma expansão de segunda ordem para a função  $W$  em torno do ponto de ressonância, nos permite escrever

$$\begin{aligned} \psi(t, t_0) = \\ Exp \left\{ -iA \int_{t_0}^t d\lambda \left[ e^{iW(t_r) + \frac{1}{2}W^{(2)}(\lambda - t_r)^2} \sigma_+ + e^{-iW(t_r) - \frac{1}{2}W^{(2)}(\lambda - t_r)^2} \sigma_- \right] \right\} \phi(t_0) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Utilizando a definição de expansional como série ordenada de integrais, temos

$$\psi(t, t_0) = \{ 1 - iA \int_{t_0}^t d\lambda \left[ e^{iW(t_r) + \frac{1}{2}W^{(2)}(\lambda - t_r)^2} \sigma_+ + e^{-iW(t_r) - \frac{1}{2}W^{(2)}(\lambda - t_r)^2} \sigma_- \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + (-iA)^2 \int_{t_0}^t d\lambda \left[ e^{iW(t_r) + \frac{i}{2}W^{(2)}(\lambda - t_r)^2} \sigma_+ + e^{-iW(t_r) - \frac{i}{2}W^{(2)}(\lambda - t_r)^2} \sigma_- \right] \cdot \\
& \cdot \int_{t_0}^\lambda d\zeta \left[ e^{iW(t_r) + \frac{i}{2}W^{(2)}(\zeta - t_r)^2} \sigma_+ + e^{-iW(t_r) - \frac{i}{2}W^{(2)}(\zeta - t_r)^2} \sigma_- \right] + \dots \} \phi(t_0)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Vamos definir

$$\varsigma(\kappa) = e^{iW(t_r) + \frac{i}{2}W^{(2)}(\kappa - t_r)^2}$$

Escrevemos os elementos da matriz de transição em função destas séries ordenadas como

$$\begin{aligned}
T_{11} &= 1 + (-iA)^2 \int \varsigma \int \varsigma^* + (-iA)^4 \int \varsigma \int \varsigma^* \int \varsigma \int \varsigma^* + \dots \\
T_{12} &= -iA \int \varsigma + (-iA)^3 \int \varsigma \int \varsigma^* \int \varsigma + \dots \\
T_{21} &= -iA \int \varsigma^* + (-iA)^3 \int \varsigma^* \int \varsigma \int \varsigma^* + \dots \\
T_{22} &= 1 + (-iA)^2 \int \varsigma^* \int \varsigma + (-iA)^4 \int \varsigma^* \int \varsigma \int \varsigma^* \int \varsigma + \dots
\end{aligned}$$

Essas múltiplas integrais podem ser calculadas usando-se do método da fase estacionária ( ref. [14] ) obtendo-se:

$$T_{11}(t_r) = \frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} \tag{4.4}$$

$$T_{12}(t_r) = -i \frac{2\xi}{1 + \xi^2} e^{i\vartheta} \tag{4.5}$$

$$T_{21}(t_r) = -i \frac{2\xi}{1 + \xi^2} e^{-i\vartheta} \tag{4.6}$$

$$T_{22}(t_r) = \frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} \tag{4.7}$$

onde

$$\xi = A \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} \big|_{t=t_r}}} \tag{4.8}$$

e  $\xi^2 < 1$

$$\begin{aligned}
& |T_{11}|^2 + |T_{12}|^2 = 1 \\
& |T_{22}|^2 + |T_{21}|^2 = 1
\end{aligned}$$

## 4.2 O problema composto com influência da ressonância

Da matriz ressonante obtida na seção anterior,

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2} & -\frac{2i\xi}{1+\xi^2}e^{i\vartheta} \\ -\frac{2i\xi}{1+\xi^2}e^{-i\vartheta} & \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2} \end{pmatrix},$$

que podemos escrever de modo mais compacto como

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ -R_{12}^* & R_{11} \end{pmatrix}.$$

Fazendo a composição com sistema

$$H_2(t) = \begin{cases} H_2^1(t) & t_0 \leq t \leq t_c \\ H_2^2(t) & t \geq t_c \end{cases}$$

onde

$$H_2^1(t) = \begin{pmatrix} h_{11}^1(t) & h_{12}^1(t) \\ h_{12}^1(t) & h_{22}^1(t) \end{pmatrix}, \quad H_2^2(t) = \begin{pmatrix} h_{11}^2(t) & h_{12}^2(t) \\ h_{12}^2(t) & h_{22}^2(t) \end{pmatrix}$$

tomando as matrizes de transição escritas como em (3.20) e (3.21)

$$T_1(t_c, t_0) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \omega_1(t_c - t_0) + i \cos 2\theta_1 \sin \omega_1(t_c - t_0) & -i \sin 2\theta_1 \sin \omega_1(t_c - t_0) \\ -i \sin 2\theta_1 \sin \omega_1(t_c - t_0) & \cos \omega_1(t_c - t_0) - i \cos 2\theta_1 \sin \omega_1(t_c - t_0) \end{pmatrix}$$

$$T_2(t, t_c) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \omega_2(t - t_c) + i \cos 2\theta_2 \sin \omega_2(t - t_c) & -i \sin 2\theta_2 \sin \omega_2(t - t_c) \\ -i \sin 2\theta_2 \sin \omega_2(t - t_c) & \cos \omega_2(t - t_c) - i \cos 2\theta_2 \sin \omega_2(t - t_c) \end{pmatrix}$$

Desta forma, como supusemos que o sistema se comporta segundo  $T_1(t, t_0)$  até o instante  $t_c$ , sofre influência de  $R$  neste instante, e depois se comporta segundo  $T_2(t, t_c)$ , escrevemos a transição total como função de Green

$$T(t, t_0) = G_2(t, t_{r+}) \cdot G_r(t_{r+}, t_{r-}) \cdot G_1(t_{r-}, t_0) \quad (4.9)$$

$$= T_2(t, t_r) \circ R(l_r) \circ T_1(t_r, t_0) \quad (4.10)$$

Nesta situação, as amplitudes de transição são escritas como

$$\begin{aligned} A^{(1 \rightarrow 1)} &= (T)_{11} = (T_2)_{11}(R)_{ij}(T_1)_{j1} \\ &= (T_2)_{11}(R)_{11}(T_1)_{11} + (T_2)_{11}(R)_{12}(T_1)_{21} + \\ &\quad + (T_2)_{12}(R)_{21}(T_1)_{11} + (T_2)_{12}(R)_{22}(T_1)_{21} \\ A^{(1 \rightarrow 2)} &= (T)_{12} \\ &= (T_2)_{11}(R)_{11}(T_1)_{12} + (T_2)_{11}(R)_{12}(T_1)_{22} + \\ &\quad + (T_2)_{12}(R)_{21}(T_1)_{12} + (T_2)_{12}(R)_{22}(T_1)_{22} \\ A^{(2 \rightarrow 2)} &= (T)_{22} \\ &= (T_2)_{21}(R)_{11}(T_1)_{12} + (T_2)_{21}(R)_{12}(T_1)_{22} \\ &\quad + (T_2)_{22}(R)_{21}(T_1)_{12} + (T_2)_{22}(R)_{22}(T_1)_{22} \\ A^{(2 \rightarrow 1)} &= (T)_{21} \\ &= (T_2)_{21}(R)_{11}(T_1)_{11} + (T_2)_{21}(R)_{12}(T_1)_{21} + \\ &\quad + (T_2)_{22}(R)_{21}(T_1)_{11} + (T_2)_{22}(R)_{22}(T_1)_{21} \end{aligned}$$

E as probabilidades de transição são escritas como

$$\begin{aligned} P^{(1 \rightarrow 1)} &= |A^{(1 \rightarrow 1)}|^2 \\ P^{(1 \rightarrow 2)} &= |A^{(1 \rightarrow 2)}|^2 \\ P^{(2 \rightarrow 1)} &= |A^{(2 \rightarrow 1)}|^2 \\ P^{(2 \rightarrow 2)} &= |A^{(2 \rightarrow 2)}|^2. \end{aligned}$$

Logo expressão para a a probabilidade de permanência  $P^{(1 \rightarrow 1)}$ , é escrita como

$$\begin{aligned} P_R^{(1 \rightarrow 1)} &= \left( \frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} \right)^2 \cdot P_P + \\ &\quad \left( \frac{2\xi}{1 + \xi^2} \right)^2 F_1 \cos^2 \varphi + \left( \frac{2\xi}{1 + \xi^2} \right)^2 F_2 \sin^2 \varphi + \\ &\quad 4\xi \frac{1 - \xi^2}{(1 + \xi^2)^2} F_3 \cos \varphi + 4\xi \frac{1 - \xi^2}{(1 + \xi^2)^2} F_4 \sin \varphi \\ &\quad - \frac{8\xi^2}{(1 + \xi^2)^2} F_5 \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde

$$\begin{aligned}
P_P &= \cos^2 2(\theta_2 - \theta_1) \sin^2 \omega_2(t - t_c) \sin^2 \omega_1(t_c - t_o) \\
&\quad + \cos^2 2\theta_1 \cos^2 \omega_2(t - t_c) \cos^2 \omega_1(t_c - t_o) \\
&\quad + \cos^2 2\theta_1 \cos^2 \omega_2(t - t_c) \sin^2 \omega_1(t_c - t_o) \\
&\quad + \cos^2 2\theta_2 \sin^2 \omega_2(t - t_c) \cos^2 \omega_1(t_c - t_o) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 \sin 2\omega_1(t_c - t_o) \sin 2\omega_2(t - t_c) \\
F_1 &= \sin^2 2(\theta_1 - \theta_2) \sin^2 \omega_1(t_c - t_0) \sin^2 \omega_2(t - t_c) + \\
&\quad + \sin^2 2\theta_1 \sin^2 \omega_1(t_c - t_0) \cos^2 \omega_2(t - t_c) \\
&\quad + \sin^2 2\theta_2 \cos^2 \omega_1(t_c - t_0) \sin^2 \omega_2(t - t_c) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 \sin 2\omega_1(t_c - t_0) \sin 2\omega_2(t - t_c) \\
F_2 &= \sin^2 2(\theta_1 - \theta_2) \sin^2 \omega_1(t_c - t_0) \sin^2 \omega_2(t - t_c) + \\
&\quad + \sin^2 2\theta_1 \sin^2 \omega_1(t_c - t_0) \cos^2 \omega_2(t - t_c) \\
&\quad + \sin^2 2\theta_2 \cos^2 \omega_1(t_c - t_0) \sin^2 \omega_2(t - t_c) + \\
&\quad - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 \sin 2\omega_1(t_c - t_0) \sin 2\omega_2(t - t_c) \\
F_3 &= \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \sin 2\omega_1(t_c - t_0) \cos^2 \omega_2(t - t_0) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sin 2\theta_2 \cos^2 \omega_1(t_c - t_0) \sin 2\omega_2(t - t_0) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sin 4\theta_1 \sin 2\theta_2 \sin^2 \omega_1(t_c - t_0) \sin 2\omega_2(t - t_0) \\
&\quad - \frac{1}{2} \cos 2(\theta_1 - \theta_2) \sin 2\theta_2 \sin 2\omega_1(t_c - t_0) \sin^2 \omega_2(t - t_0) \\
F_4 &= \frac{1}{2} \sin 4(\theta_1 - \theta_2) \sin^2 \omega_1(t_c - t_0) \sin^2 \omega_2(t - t_0) + \\
&\quad - \frac{1}{2} \sin 4\theta_1 \sin^2 \omega_1(t_c - t_0) \cos^2 \omega_2(t - t_0) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \cos 4\theta_1 \cos^2 \omega_1(t_c - t_0) \sin^2 \omega_2(t - t_0) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \sin 2(\theta_1 - \theta_2) \cos 2\theta_1 \sin 2\omega_1(t_c - t_0) \sin^2 \omega_2(t - t_0) \\
F_5 &= -\frac{1}{2} \sin 4\theta_1 \sin 2\theta_2 \sin^2 \omega_1(t_c - t_0) \sin 2\omega_2(t - t_c) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \sin 4\theta_2 \sin 2\omega_1(t_c - t_0) \sin^2 \omega_2(t - t_c)
\end{aligned}$$

e para a probabilidade de troca  $P^{(1 \rightarrow 2)}$  é

$$\begin{aligned}
P_R^{(1 \rightarrow 2)} = & \left( \frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} \right)^2 \cdot P_P + \\
& \left( \frac{2\xi}{1 + \xi^2} \right)^2 G_1 \cos^2 \varphi + \left( \frac{2\xi}{1 + \xi^2} \right)^2 G_2 \sin^2 \varphi + \\
& 4\xi \frac{1 - \xi^2}{(1 + \xi^2)^2} G_3 \cos \varphi + 4\xi \frac{1 - \xi^2}{(1 + \xi^2)^2} G_4 \sin \varphi \\
& - \frac{8\xi^2}{(1 + \xi^2)^2} G_5 \sin \varphi \cos \varphi
\end{aligned} \tag{4.12}$$

onde

$$\begin{aligned}
P_T = & \sin^2 2(\theta_2 - \theta_1) \sin^2 \omega_2(t - t_c) \sin^2 \omega_1(t_c - t_o) \\
& + \sin^2 2\theta_2 \cos^2 \omega_2(t - t_c) \sin^2 \omega_1(t_c - t_o) \\
& + \sin^2 2\theta_1 \cos^2 \omega_2(t - t_c) \sin^2 \omega_1(t_c - t_o) \\
& + \sin^2 2\theta_2 \sin^2 \omega_2(t - t_c) \cos^2 \omega_1(t_c - t_o) \\
& + \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 \sin 2\omega_1(t_c - t_o) \sin 2\omega_2(t - t_c) \\
G_1 = & \cos^2 \omega_2(t - t_c) \cos^2 \omega_1(t_c - t_o) \\
& + \cos^2 2(\theta_1 - \theta_2) \sin^2 \omega_2(t - t_c) \sin^2 \omega_1(t_c - t_o) \\
& + \cos^2 2\theta_1 \cos^2 \omega_2(t - t_c) \sin^2 \omega_1(t_c - t_o) \\
& + \cos^2 2\theta_2 \sin^2 \omega_2(t - t_c) \cos^2 \omega_1(t_c - t_o) \\
& - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 \sin 2\omega_2(t - t_c) \sin 2\omega_1(t_c - t_o) \\
G_2 = & \cos^2 2(\theta_2 - \theta_1) \sin^2 \omega_2(t - t_c) \sin^2 \omega_1(t_c - t_o) \\
& + \cos^2 \omega_2(t - t_c) \cos^2 \omega_1(t_c - t_o) \\
& + \cos^2 2\theta_2 \sin^2 \omega_2(t - t_c) \cos^2 \omega_1(t_c - t_o) \\
& + \cos^2 2\theta_1 \cos^2 \omega_2(t - t_c) \sin^2 \omega_1(t_c - t_o) \\
& + \frac{1}{2} \sin 2\theta_2 \sin 2\theta_1 \sin 2\omega_2(t - t_c) \sin 2\omega_1(t_c - t_o) \\
G_3 = & \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \sin 2\omega_1(t_c - t_o) \\
& + \frac{1}{2} \sin 2\theta_2 \sin 2\omega_2(t - t_c) \\
G_4 = & \sin 2\theta_1 \cos 2\theta_1 \cos^2 \omega_2(t - t_c) \sin^2 \omega_1(t_c - t_o) \\
& - \frac{1}{2} \sin 4(\theta_2 - \theta_1) \sin^2 \omega_2(t - t_c) \sin^2 \omega_1(t_c - t_o) \\
& - \sin 2\theta_2 \cos 2\theta_1 \sin^2 \omega_2(t - t_c) \cos^2 \omega_1(t_c - t_o)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_5 = & \frac{1}{2} \sin 2\theta_2 \sin 4\theta_1 \sin^2 \omega_1 (t_c - t_0) \sin 2\omega_2 (t - t_c) + \\
& - \frac{1}{2} \sin 2\theta_2 \sin 4\theta_1 \sin 2\omega_1 (t_c - t_0) \sin^2 \omega_2 (t - t_c) \\
& - \cos 2\theta_1 \cos^2 \omega_2 (t - t_c) \sin 2\omega_1 (t_c - t_0) \\
& + \cos 2\theta_2 \sin 2\omega_2 (t - t_c) \cos^2 \omega_1 (t_c - t_0)
\end{aligned}$$

Observe-se que

$$P_R^{(1 \rightarrow 1)} + P_R^{(1 \rightarrow 2)} = 1$$

Esses resultados exprimem as probabilidades de permanência e de troca quando se leva em conta todos os termos oscilantes.

# Capítulo 5

## Aplicação

Neste capítulo vamos fazer uma aplicação dos resultados obtidos na seção anterior, usando-se a hamiltoniana que descreve a evolução temporal de um sistema de dois neutrinos, eletrônico e muônico, que interagem com a matéria solar.

Vamos nos limitar a utilização dessa hamiltoniana sem entrar no mérito de sua derivação no contexto do modelo MSW. Uma discussão clara a respeito desse modelo pode ser encontrada nas refs. [17] e [25].

Nessa situação a hamiltoniana de interação é dada por

$$H_2 = \begin{cases} H_2^1, & t_0 \leq t \leq t_s \\ H_2^2, & t_s \geq t \end{cases}$$

onde  $t_s$  é o instante em que os neutrinos atravessam a superfície do Sol. A hamiltoniana na matéria é

$$H_2^1(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Delta}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta}{4E} \sin 2\theta & \frac{\Delta}{2E} \cos 2\theta - 2A(t) \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

e a hamiltoniana no vácuo é dada por

$$H_2^2(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Delta}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta}{4E} \sin 2\theta & \frac{\Delta}{2E} \cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

O ângulo  $\theta$  é o ângulo de mistura no vácuo,  $\Delta = m_2^2 - m_1^2$  é a diferença de massa quadrática dos neutrinos,  $E$  é a energia dos neutrinos e

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} G_F N_e(t) \quad (5.3)$$

onde  $G_F$  é a constante de Fermi e  $N_e(t)$  é a distribuição eletrônica no Sol.

Com essa hamiltoniana, vamos estudar as probabilidades de transição entre



estados de sabores de dois neutrinos ( $\nu_e, \nu_\mu$ ) quando o neutrino criado no interior do Sol é um neutrino eletrônico. A equação de evolução temporal é

$$i \frac{d}{dt} \phi = H_2 \phi \quad (5.4)$$

sendo

$$\phi = \begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix}$$

com a seguinte condição de contorno

$$\phi(t_0) = \begin{pmatrix} \nu_e(0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

A fim de usarmos as probabilidades calculadas no capítulo anterior, vamos introduzir as definições necessárias em termos dos elementos da matriz  $H_2$ .

### Definições:

1. frequência de oscilação na matéria:

$$\omega_m = \sqrt{\left(\frac{\Delta}{4E} \sin 2\theta\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta}{2E} \cos 2\theta - 2A(t_0)\right)^2} \quad (5.5)$$

2. frequência de oscilação no vácuo:

$$\omega_v = \sqrt{\left(\frac{\Delta}{4E} \sin 2\theta\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta}{2E} \cos 2\theta\right)^2} \quad (5.6)$$

3.  $\Delta t_m$  a distância percorrida pelo neutrino na matéria - vamos tomar este valor como sendo a distância entre o ponto de criação do neutrino, e a ressonância. Em unidades de  $eV^{-1}$ , tem-se que  $\Delta t_m$  é  $\Delta t_v = 3,527 \times 10^{15} \text{ } eV^{-1}$  quando não há ressonância.
4.  $\Delta t_v$  a distância percorrida pelo neutrino no vácuo - vamos tomar este valor como sendo a distância média entre a borda do Sol e a Terra:  $\Delta t_m = 7,58 \times 10^{17} \text{ } eV^{-1}$ .
5. ângulo de mixing na matéria:

$$\sin^2 2\theta_m = \frac{\sin^2 2\theta}{[4A(t) \frac{E}{\Delta} - \cos 2\theta]^2 + \sin^2 2\theta} \quad (5.7)$$

6. A variável  $\xi$ , definida anteriormente pela equação (4.8), é dada por

$$\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta}{4E} \sin 2\theta \frac{1}{\sqrt{|\frac{d^2}{dt^2} \rho(t)|_{t=t_r}}} \quad (5.8)$$

onde

$$\rho(t) = \int^{t_r} d\lambda \left[ \frac{\Delta}{2E} \cos 2\theta - 2A(\lambda) \right] \quad (5.9)$$

que em função do parâmetro de adiabaticidade  $\gamma$  é dado por

$$\xi^2 = \frac{\pi}{16} \gamma \quad (5.10)$$

As condições de adiabaticidade em termos do parâmetro  $\xi$  são:

a) para a transição adiabática

$$\xi^2 > \frac{16}{\pi} \quad (5.11)$$

b) para a transição não adiabática

$$\xi^2 < \frac{16}{\pi} \quad (5.12)$$

7. A probabilidade de permanência sem termos ressonantes é dada por

$$\begin{aligned} P_1^{(1 \rightarrow 1)} = & \cos^2(\theta_m - \theta) P_{adiab}^{(1 \rightarrow 1)} + \sin^2(\theta_m - \theta) P_{adiab}^{(1 \rightarrow 2)} + \\ & + \frac{1}{2} \cos 2\theta \sin 2\theta_m \sin 2(\theta_m - \theta) \cos 2\omega_m(t - t_c) + \\ & - \frac{1}{2} \sin 2\theta \cos 2\theta_m \sin 2(\theta_m - \theta) \cos 2\omega_v(t_c - t_0) + \\ & + \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin 2\theta_m \cos^2(\theta_m - \theta) \cdot \\ & \cdot \cos 2[\omega_m(t - t_c) + \omega_v(t_c - t_0)] + \\ & - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 \sin^2(\theta_m - \theta) \cdot \\ & \cdot \cos 2[\omega_m(t - t_c) - \omega_v(t_c - t_0)] \end{aligned} \quad (5.13)$$

e com termos ressonantes

$$P_2^{(1 \rightarrow 1)} = P_R^{(1 \rightarrow 1)} = \left( \frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} \right)^2 \cdot |P_P| +$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{2\xi}{1+\xi^2}\right)^2 F_1 \cos^2 \varphi + \left(\frac{2\xi}{1+\xi^2}\right)^2 F_2 \sin^2 \varphi + \\
& 4\xi \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2} F_3 \cos \varphi + 4\xi \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2} F_4 \sin \varphi \\
& - \frac{8\xi^2}{(1+\xi^2)^2} F_5 \sin \varphi \cos \varphi
\end{aligned} \tag{5.14}$$

onde

$$\begin{aligned}
P_P &= \cos^2 2(\theta_2 - \theta_v) \sin^2 \omega_v(t - t_c) \sin^2 \omega_m(t_c - t_o) \\
&+ \cos^2 2\theta_m \cos^2 \omega_v(t - t_c) \cos^2 \omega_m(t_c - t_o) \\
&+ \cos^2 2\theta_m \cos^2 \omega_v(t - t_c) \sin^2 \omega_m(t_c - t_o) \\
&+ \cos^2 2\theta_v \sin^2 \omega_v(t - t_c) \cos^2 \omega_m(t_c - t_o) \\
&+ \frac{1}{2} \sin 2\theta_m \sin 2\theta_v \sin 2\omega_m(t_c - t_o) \sin 2\omega_v(t - t_c) \\
F_1 &= \sin^2 2(\theta_m - \theta_v) \sin^2 \omega_m(t_c - t_o) \sin^2 \omega_v(t - t_c) + \\
&+ \sin^2 2\theta_m \sin^2 \omega_m(t_c - t_o) \cos^2 \omega_v(t - t_c) + \\
&+ \sin^2 2\theta_v \cos^2 \omega_m(t_c - t_o) \sin^2 \omega_v(t - t_c) \\
&+ \frac{1}{2} \sin 2\theta_m \sin 2\theta_v \sin 2\omega_m(t_c - t_o) \sin 2\omega_v(t - t_c) \\
F_2 &= \sin^2 2(\theta_m - \theta_v) \sin^2 \omega_m(t_c - t_o) \sin^2 \omega_v(t - t_c) + \\
&+ \sin^2 2\theta_m \sin^2 \omega_m(t_c - t_o) \cos^2 \omega_v(t - t_c) + \\
&+ \sin^2 2\theta_v \cos^2 \omega_m(t_c - t_o) \sin^2 \omega_v(t - t_c) + \\
&- \frac{1}{2} \sin 2\theta_m \sin 2\theta_v(t - t_c) \sin 2\omega_m(t_c - t_o) \sin 2\omega_v(t - t_c) \\
F_3 &= \frac{1}{2} \sin 2\theta_m \sin 2\omega_m(t_c - t_o) \cos^2 \omega_v(t - t_o) \\
&+ \frac{1}{2} \sin 2\theta_v \cos^2 \omega_m(t_c - t_o) \sin 2\omega_v(t - t_o) \\
&+ \frac{1}{2} \sin 4\theta_m \sin 2\theta_v \sin^2 \omega_m(t_c - t_o) \sin 2\omega_v(t - t_o) \\
&- \frac{1}{2} \cos 2(\theta_m - \theta_v) \sin 2\theta_v \sin 2\omega_m(t_c - t_o) \sin^2 \omega_v(t - t_o) \\
F_4 &= \frac{1}{2} \sin 4(\theta_m - \theta_v) \sin^2 \omega_m(t_c - t_o) \sin^2 \omega_v(t - t_o) + \\
&- \frac{1}{2} \sin 4\theta_m \sin^2 \omega_m(t_c - t_o) \cos^2 \omega_v(t - t_o) + \\
&+ \frac{1}{2} \cos 4\theta_m \cos^2 \omega_m(t_c - t_o) \sin^2 \omega_v(t - t_o) + \\
&+ \frac{1}{2} \sin 2(\theta_m - \theta_v) \cos 2\theta_m \sin 2\omega_m(t_c - t_o) \sin^2 \omega_v(t - t_o)
\end{aligned}$$

$$F_5 = -\frac{1}{2} \sin 4\theta_m \sin 2\theta_v \sin^2 \omega_m (t_c - t_0) \sin 2\omega_v (t - t_c) + \\ + \frac{1}{2} \sin 2\theta_m \sin 4\theta_v \sin 2\omega_m (t_c - t_0) \sin^2 \omega_v (t - t_c)$$

Desprezando-se todos os termos oscilantes, tem-se para as probabilidades de permanência e troca adiabáticas

$$P_1^{(1 \rightarrow 1)} = \cos^2(\theta_m - \theta_m) P_{adiab}^{(1 \rightarrow 1)} + \sin^2(\theta_m - \theta_v) P_{adiab}^{(1 \rightarrow 2)} \quad (5.15)$$

$$P_1^{(1 \rightarrow 2)} = \cos^2(\theta_m - \theta_v) P_{adiab}^{(1 \rightarrow 2)} + \sin^2(\theta_m - \theta_v) P_{adiab}^{(1 \rightarrow 1)} \quad (5.16)$$

e para as probabilidades de permanência e troca não adiabáticas

$$P_1^{(1 \rightarrow 1)} = P_v \cdot [g^2 P_m + f^2 (1 - P_m)] + (1 - P_v) [g^2 (1 - P_m) + f^2 P_m] + \\ + g^2 \cos 2\theta \cdot \cos 2\theta_m \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot (1 - P_m) \quad (5.17)$$

$$P_2^{(1 \rightarrow 2)} = (1 - P_v) \cdot [g^2 P_m + f^2 (1 - P_m)] + P_v [g^2 (1 - P_m) + f^2 P_m] + \\ - g^2 \cos 2\theta \cdot \cos 2\theta_m \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot (1 - P_m) \quad (5.18)$$

$$\text{onde } \begin{cases} P_v = \cos^4 \theta + \sin^4 \theta \\ P_m = \cos^4 \theta_m + \sin^4 \theta_m + 2 \sin^2 \theta_m \cos \theta_m \cos 2\omega_m (t_0 - t_m) \\ g^2 = \left( \frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} \right)^2 \\ f^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{2\xi}{1 + \xi^2} \right)^2 \end{cases}$$

8. O campo de interação  $A$  entre o neutrino e a matéria é dado ( ref. [17] )

$$A(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot G_F \cdot N_e(t)$$

sendo que

$$N_e(t) = N_e(0) \cdot \exp \left( -\frac{az^2}{z+b} \right) \quad (5.19)$$

onde  $N_e(0) = N_{Avogadro} = 6.03 \times 10^{23}/\text{cm}^3$ ,  $z = \frac{t}{R_\odot}$ ,  $R_\odot = 3.57 \times 10^{15} \text{ eV}^{-1}$  é o raio solar equatorial médio e os parâmetros  $a$  e  $b$  são dados segundo as parametrizações dos dados experimentais que se encontra na Tabela 5.1

quantidade	$N(0)/N_{\text{Avogadro}}$	$a$	$b$
$n_e$	98.8	11.1	0.15
$n_n$	48.8	11.1	0.02
$n_e + \frac{1}{2}n_n$	74.6	11.1	0.20

Tabela 5.1: Valores do campo de interação para densidades de elétrons e neutrons do Sol.

Note-se que destas parametrizações, permite-se aproximar a equação (5.3) como

$$\alpha \cdot e^{-\beta t} = \frac{\sqrt{2}}{2} G_F N_e(t) \quad (5.20)$$

onde  $\alpha = 1.25 \times 10^{-11} \text{ eV}$ ,  $\beta = 3.13 \times 10^{-15} \text{ eV}$ ,  $G_F$  é a constante de Fermi, e  $N_e(t)$  é a densidade de neutrinos eletrônicos.

9. A partir do resultado obtido na seção (2.6), temos que a condição de ressonância é dada por

$$\frac{\Delta}{2E} \cos 2\theta - 2 \cdot A(t_r) = 0 \quad (5.21)$$

e portanto podemos escrever

$$\frac{E}{\Delta} = \frac{\cos 2\theta}{4 \cdot A(t_r)} \quad (5.22)$$

o que nos fornece o valor de  $E/\Delta$  na ressonância.

## 5.1 Transições adiabáticas

Vamos analisar as probabilidades de transição na situação adiabática determinadas sobre uma média temporal (desprezando-se as oscilações). Nessa situação, obtem-se

$$P_1(\nu_e \rightarrow \nu_e) = \cos^2 \theta \cos^2 \theta_m + \sin^2 \theta \sin^2 \theta_m = P_{(\nu_e \rightarrow \nu_e)}^{\text{adiab}} \quad (5.23)$$

$$P_1(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \sin^2 \theta \cos^2 \theta_m + \cos^2 \theta \sin^2 \theta_m = P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}^{adiab} \quad (5.24)$$

reproduzindo-se assim os resultados bem conhecidos para essas probabilidades de transição.

## 5.2 Transições Não Adiabáticas

Usando as equações (5.17) e (5.18) e fazendo-se a média temporal ( desprezando-se os termos oscilantes ) obtem-se as seguintes expressões para as probabilidades de transição não adiabática. Escrevemos as probabilidades de transição como na equação (5.15)

$$P_1^{(1 \rightarrow 1)} = P_v \cdot [g^2 P_m + f^2 (1 - P_m)] + (1 - P_v) [g^2 (1 - P_m) + f^2 P_m] + g^2 \cos 2\theta \cdot \cos 2\theta_m \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot (1 - P_m) \quad (5.25)$$

$$P_2^{(1 \rightarrow 2)} = (1 - P_v) \cdot [g^2 P_m + f^2 (1 - P_m)] + P_v [g^2 (1 - P_m) + f^2 P_m] - g^2 \cos 2\theta \cdot \cos 2\theta_m \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot (1 - P_m) \quad (5.26)$$

onde

$$\begin{cases} P_v = \cos^4 \theta + \sin^4 \theta \\ P_m = \cos^4 \theta_m + \sin^4 \theta_m \\ g^2 = \left( \frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} \right)^2 \\ f^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{2\xi}{1 + \xi^2} \right)^2 \end{cases}$$

Essas expressões podem ser simplesmente escritas na seguinte forma

$$P_1^{(1 \rightarrow 1)} = (1 - X) P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}^{adiab} + X P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}^{adiab} \quad (5.27)$$

$$P_2^{(1 \rightarrow 2)} = X P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}^{adiab} + (1 - X) P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}^{adiab} \quad (5.28)$$

onde  $X$  é a probabilidade de transição de *level crossing* ,

$$X = \left( \frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} \right)^2 \sin^2 [\theta_m - \theta] + \frac{2\xi^2}{(1 + \xi^2)^2} \{ \cos^2 [\theta_m - \theta] + \cos^2 [\theta_m + \theta] \} \quad (5.29)$$

Essas expressões foram obtidas anteriormente por Guzzo, Bellandi e Aquino ( ref. [5] ). Note-se que no limite extremo de não adiabaticidade,  $\xi^2 \rightarrow 0$ , obtem-se o comportamento correto para a probabilidade de level-crossing,

$$\lim_{\xi^2 \rightarrow 0} X = \cos^2 \theta$$

Na ref. [5], Guzzo *et al.* mostram o comportamento dessa probabilidade de level crossing com o parâmetro de adiabaticidade, em comparação com a expressão obtida por Petcov ( ref. [21])

$$X = \frac{\exp[-\gamma F] - \exp[-\gamma F / \sin^2 \theta]}{1 - \exp[-\gamma F / \sin^2 \theta]} \quad (5.30)$$

onde

$$F = 1 - \tan^2 \theta$$

Na figura 5.1, reproduzimos a probabilidade de level-crossing usando-se a equação (5.29). Na ref. [5] foi feita a comparação desses resultados com o calculado com a expressão de Petcov (ref. [21]), mostrando uma boa concordância entre eles.

### 5.3 Influência do ponto de criação dos neutrinos

Nesta seção vamos discutir a influência do ponto de criação dos neutrinos no interior do Sol.

É bem conhecido que os experimentos para detecção dos neutrinos não tem condição de reconhecer o ponto no interior solar ( ref. [23] ) onde os neutrinos foram criados. Os resultados experimentais normalmente exprimem uma média do fluxo de neutrinos.

Do ponto de vista matemático, no entanto, pode-se estudar a influência do ponto de criação nas probabilidades de transição.

Como vamos apresentar nossos resultados graficando a probabilidade de permanência em função de  $E/\Delta$ , dadas pelas equações (5.25) e (5.27), desprezando-se os termos oscilantes, necessitamos tecer considerações sobre a variação do parâmetro  $E/\Delta$ .

A primeira limitação sobre a variação de  $E/\Delta$  é imposta pela condição de não adiabaticidade, ou seja

$$\xi^2 \leq \frac{\pi}{16} \quad (5.31)$$

Conforme discutido por Kuo-Pantaleone ( ref. [22] ) a condição para que o neutrino veja uma ressonância na sua trajetória através do sol é que a energia do

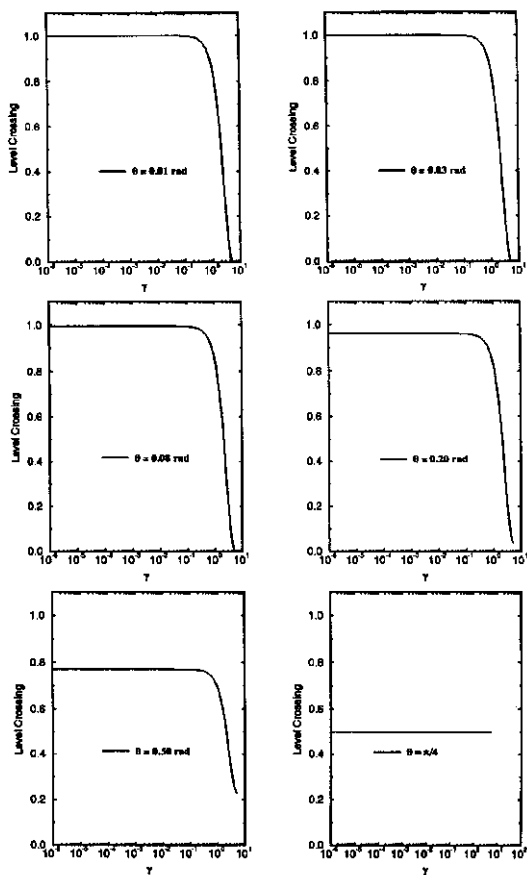


Figura 5.1: Probabilidade de "Level Crossing".



neutrino deve ser maior que

$$E = \frac{\Delta \cos 2\theta}{2\sqrt{2}G_F N_{e_{\max}}} \quad (5.32)$$

onde  $N_{e_{\max}}$  é a densidade eletrônica calculada no ponto de criação dos neutrinos.

Nas figuras 5.2 e 5.3 tem-se o comportamento de

$$\sin^2 2\theta_m \left( \frac{E}{\Delta} \right) = \frac{\sin^2 2\theta}{\left[ 4 \cdot A(t) \cdot \frac{E}{\Delta} - \cos 2\theta \right]^2 + \sin^2 2\theta} \quad (5.33)$$

em função do parâmetro  $4A/\cos 2\theta \frac{\Delta}{E}$ , mostrando-se os picos de ressonância para  $\theta = 0.20$  e  $\theta = 0.50$  rad respectivamente. A largura dessas distribuições são dadas por  $\tan^2 \theta$ , e portanto, quanto maior  $\theta$ , maior será a largura. Vamos apresentar

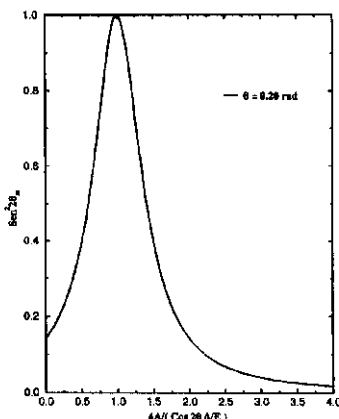


Figura 5.2: Comportamento de  $\sin 2\theta_m$ , (equação 5.33), para  $\theta = 0.20$  rad.

os gráficos da probabilidade de permanência  $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$  nas seguintes situações de criação de neutrinos, no centro, a 1/4 do raio, a 1/2 do raio e a 3/4 do raio do centro do Sol nas unidades de  $eV^{-1}$ . Os  $A(\max)$  estão na Tabela 5.2, e os valores mínimos de  $E/\Delta$  para esses  $A(\max)$  estão na Tabela 5.3. Vamos determinar os cortes para as probabilidades no seguintes pontos:

1. centro do Sol ( trajetória média que o neutrino percorre na matéria de  $R_\odot = 3.527 \times 10^{15} eV^{-1}$  )

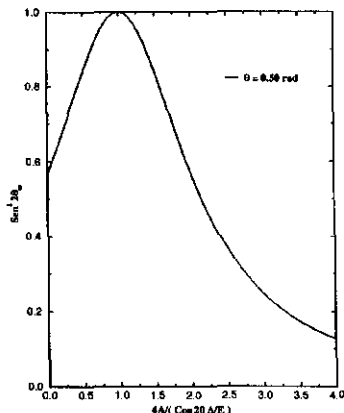


Figura 5.3: Comportamento de  $\sin^2 2\theta_m$ , (equação 5.33), para  $\theta = 0.50$  rad.

	$R_{\odot}$	$\frac{1}{4}R_{\odot}$	$\frac{1}{2}R_{\odot}$	$\frac{3}{4}R_{\odot}$
$A(t_0)$ em $eV^{-1}$	$1.25 \times 10^{-11}$	$7.911 \times 10^{-13}$	$5.001 \times 10^{-14}$	$3.173 \times 10^{-15}$

Tabela 5.2: Valores para o campo de interação.

2.  $\frac{1}{4}R_{\odot}$  do centro do Sol (trajetória média de  $2.645 \times 10^{15} eV^{-1}$  )
3.  $\frac{1}{2}R_{\odot}$  do centro do Sol (trajetória média de  $1.764 \times 10^{15} eV^{-1}$  )
4.  $\frac{3}{4}R_{\odot}$  do centro do Sol (trajetória média de  $8.818 \times 10^{14} eV^{-1}$  )

De agora em diante, denominaremos o centro do sol como  $R_{\odot}$ . Os campos de interação nos vários pontos de criação que consideraremos aqui, estão na *Tabela 5.2*. Nas figuras (5.4) e (5.5), mostramos o comportamento de  $\sin^2 2\theta_m$  em função de  $E/\Delta$  para os ângulos de mixing no vácuo dado por  $\theta = 0.50$  e  $\theta = 0.20$  respectivamente. Note-se que o máximo de  $\sin^2 2\theta_m$  ocorre para os valores de  $E/\Delta$  dados na *Tabela 5.3*.

	$\frac{E}{\Delta}(A(R_{\odot}))$	$\frac{E}{\Delta}(A(\frac{1}{4}R_{\odot}))$	$\frac{E}{\Delta}(A(\frac{1}{2}R_{\odot}))$	$\frac{E}{\Delta}(A(\frac{3}{4}R_{\odot}))$
$\theta = 0.50 \text{ rad}$	$1.081 \times 10^{10}$	$1.708 \times 10^{11}$	$2.702 \times 10^{12}$	$4.257 \times 10^{13}$
$\theta = 0.20 \text{ rad}$	$1.840 \times 10^{10}$	$2.911 \times 10^{11}$	$4.605 \times 10^{12}$	$7.257 \times 10^{13}$
$\theta = 0.08 \text{ rad}$	$1.974 \times 10^{10}$	$3.121 \times 10^{11}$	$4.936 \times 10^{12}$	$7.778 \times 10^{13}$
$\theta = 0.03 \text{ rad}$	$1.996 \times 10^{10}$	$3.155 \times 10^{11}$	$4.991 \times 10^{12}$	$7.865 \times 10^{13}$
$\theta = 0.01 \text{ rad}$	$2.000 \times 10^{10}$	$3.160 \times 10^{11}$	$4.999 \times 10^{12}$	$7.877 \times 10^{13}$

Tabela 5.3: Valores mínimo para que o neutrino veja a ressonância.

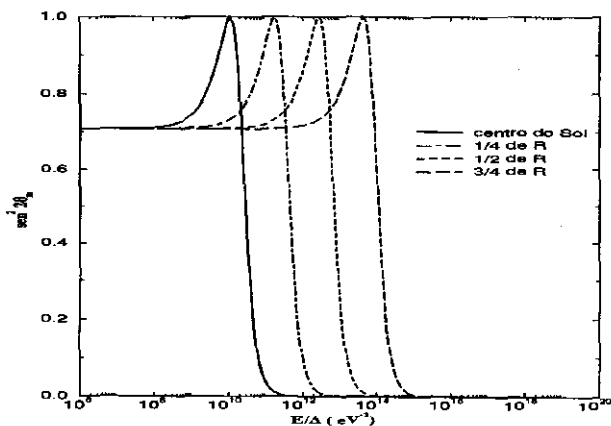


Figura 5.4: Comportamento de  $\sin^2 2\theta_m$  para  $\theta = 0.50 \text{ rad}$ , variando-se o ponto de criação do neutrino.

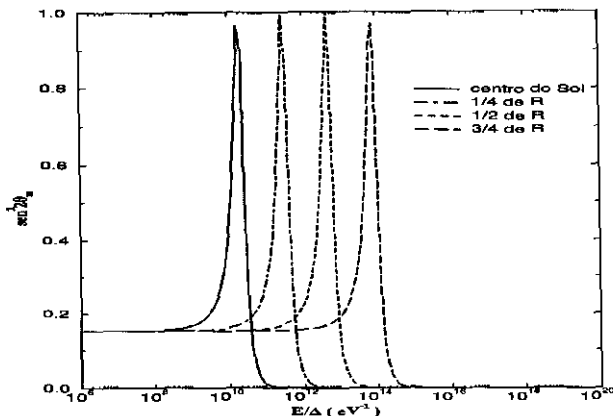


Figura 5.5: Comportamento de  $\sin^2 2\theta_m$  para  $\theta = 0.20$  rad, variando-se o ponto de criação do neutrino.

Nas figuras (5.6), (5.7), (5.8) e (5.9) apresentamos o comportamento da probabilidade de permanência para neutrinos criados em diversos pontos no interior do Sol, utilizando-se da equação (5.27), com ângulo de mistura  $\theta = 0.50$  rad.

E nas figuras de (5.10 a (5.13), apresentamos o comportamento da probabilidade  $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$  para neutrinos criados no centro do Sol para vários ângulos de mistura na vácuo.

Nas figuras (5.14) e (5.15) mostramos a influência dos termos oscilantes no interior do Sol sobre a probabilidade de permanência. Ocorrem pequenas oscilações na probabilidade na região limite a esquerda dos pontos de corte. As regiões assintóticas e o ponto de segundo mínimo estão de acordo com os resultados usuais para essas probabilidades ( ref. [17] ).

Todos esses gráficos mostram qual seria a influência do ponto de criação dos neutrinos no interior do Sol sobre as probabilidades de permanência, se os experimentos de detecção tivessem a capacidade de discernir sobre os pontos de criação dos neutrinos.

Note-se que a medida que os pontos de criação dos neutrinos se afastam do

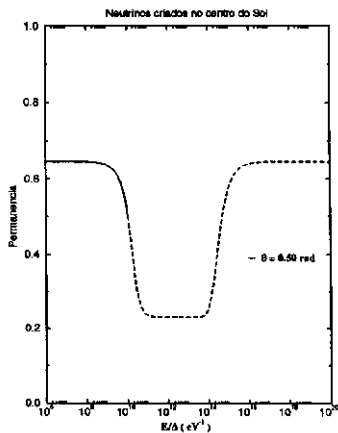


Figura 5.6: *Neutrinos criados no centro do Sol.*

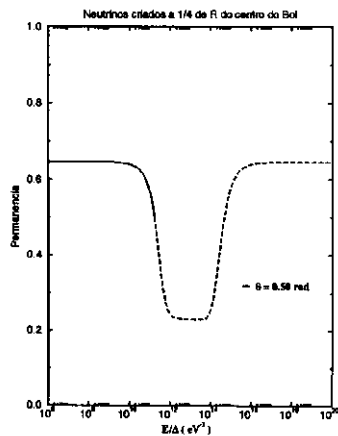


Figura 5.7: *Neutrinos criados a 1/4 do raio do centro do Sol.*

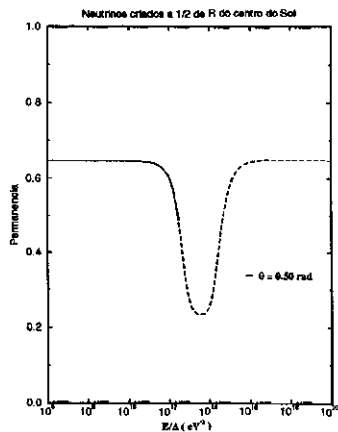


Figura 5.8: *Neutrinos criados a 1/2 do raio do centro do Sol.*

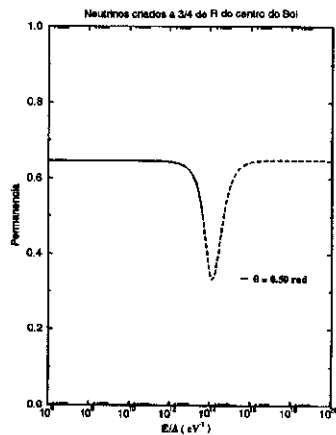


Figura 5.9: *Neutrinos criados a 3/4 do raio do centro do Sol.*

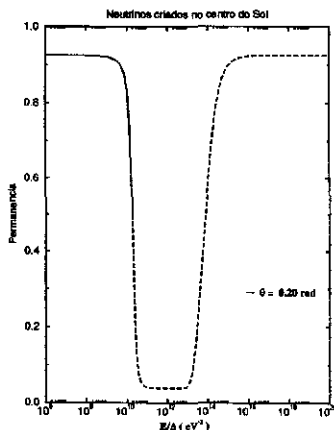


Figura 5.10: Ângulo de mixing no vácuo  $\theta = 0.20 \text{ rad}$ , para neutrino criado no centro do Sol.

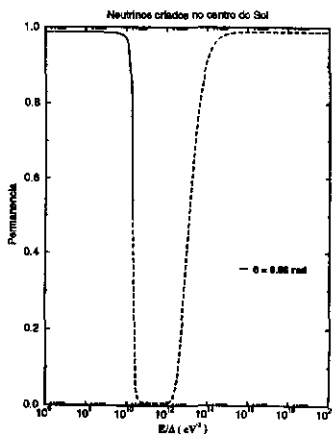


Figura 5.11: Ângulo de mixing no vácuo  $\theta = 0.08 \text{ rad.}$ , para neutrinos criados no centro do Sol

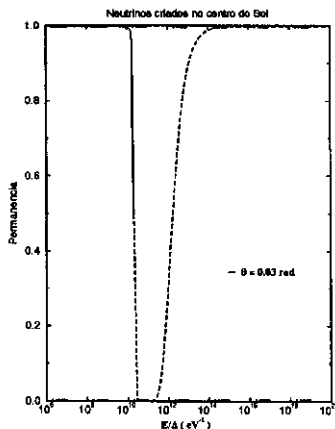


Figura 5.12: Ângulo de mixing no vácuo  $\theta = 0.03 \text{ rad.}$ , para neutrinos criados no centro do Sol

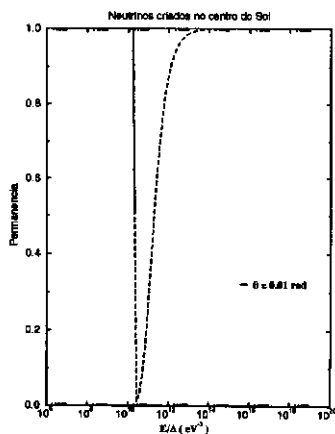


Figura 5.13: Ângulo de mixing no vácuo  $\theta = 0.01 \text{ rad.}$ , para neutrinos criados no centro do Sol



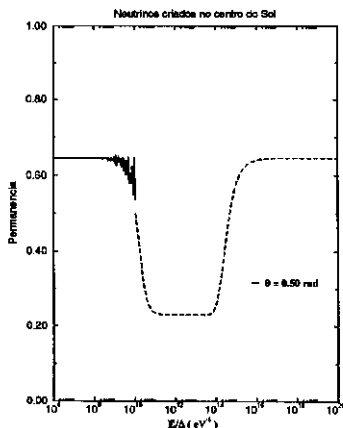


Figura 5.14: Probabilidade de Permanência levando-se em consideração a oscilação na matéria, para  $\theta = 0.50$  rad no vácuo e neutrinos criados no centro do Sol.

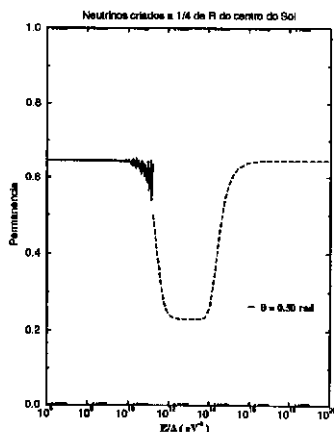


Figura 5.15: Probabilidade de Permanência levando-se em consideração a oscilação na matéria, para  $\theta = 0.20$  rad no vácuo e neutrinos criados a 1/4 do centro do Sol.

centro do Sol, a largura das distribuições de probabilidade diminuem e já no limite da superfície, a largura tende a zero.

Nas figuras 5.16 a 5.20, mostramos a mesma probabilidade de permanência usando a expressão de S. Petcov, equação (5.30), para a probabilidade de level crossing. Nota-se que não há diferença entre esses resultados e os calculados com a equação (5.29) para  $X$ .

Esse resultado está de acordo com os obtidos por Guzzo *et al*, quando estudaram as probabilidades de level crossing determinadas pela equação (5.29) em comparação com a expressão de Petcov.

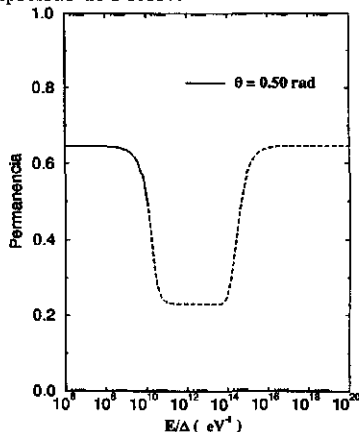


Figura 5.16: Probabilidade de Permanência utilizando-se a expressão de S. Petcov para  $\theta = 0.50$  rad no vácuo.

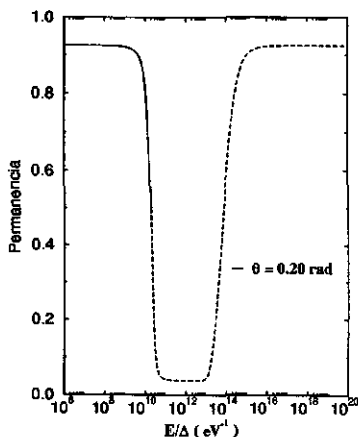


Figura 5.17: Probabilidade de Permanência utilizando-se a expressão de S. Petcov para  $\theta = 0.20$  rad no vácuo.

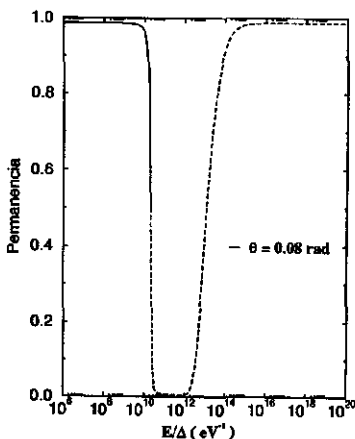


Figura 5.18: Probabilidade de Permanência utilizando-se a expressão de S. Petcov para  $\theta = 0.08$  rad no vácuo.

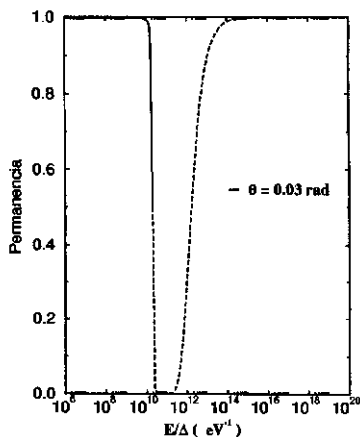


Figura 5.19: Probabilidade de Permanência utilizando-se a expressão de S. Petcov para  $\theta = 0.03$  rad no vácuo.

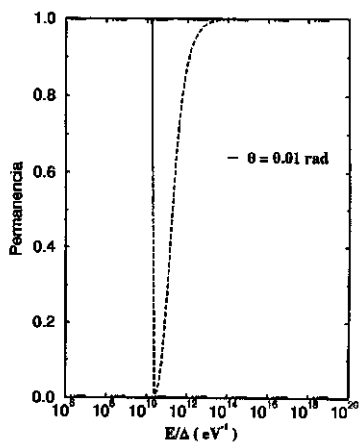


Figura 5.20: Probabilidade de Permanência utilizando-se a expressão de S. Petcov para  $\theta = 0.01$  rad no vácuo.

# Capítulo 6

## Discussões Finais

Apresentou-se neste trabalho um estudo sistemático das soluções para a equação de evolução temporal para um sistema de dois estados, usando-se do formalismo de operadores de evolução temporal. Em essência, estuda-se a evolução temporal via função de Green.

No contexto desse formalismo, o problema fundamental é determinar-se as representações matriciais para a função de Green, que determina a evolução temporal do sistema.

Inicialmente fez-se um estudo de representações matriciais para operadores exponenciais, usando-se do formalismo de transformadas de Laplace quando as matrizes de acoplamento são independentes do tempo. A utilização de representações matriciais para os geradores do grupo  $SU(n)$  só é factível para o caso de dimensão  $n = 2$ , pois as matrizes de Pauli anticomutam. Para dimensões  $n \geq 3$  não há essa facilidade pois em geral, os geradores do grupo  $SU(n)$  não anticomutam e as representações matriciais só podem ser obtidas por diagonalização.

Como consequência dessas representações matriciais, fez-se um estudo de funções de Green quando a hamiltoniana de interação tem uma representação matricial real e simétrica, para  $n = 2$  e  $n = 3$ .

Uma apropriada representação matricial pode ser obtida nessas condições, definindo-se ângulos de mixing, o que permite escrever a função de Green para  $n = 2$  como uma simples rotação no  $SU(2)$  da função de Green para a hamiltoniana de interação diagonalizada. No caso  $n = 3$ , tem-se três ângulos de mixing e a função de Green é escrita como uma sucessão de três rotações no  $SU(3)$  da função de Green para a hamiltoniana diagonalizada.

Limitando-se ao caso a duas dimensões,  $n = 2$ , analisou-se a evolução temporal de um sistema sujeito a duas regiões distintas de interação. Via função de Green, calculou-se a matriz de transição, cujos elementos definem as amplitudes de

transição entre estados spinoriais e as consequentes probabilidades de transição.

Realizou-se também um estudo de evolução temporal quando a matriz de evolução depende do tempo numa situação particular: matriz real e simétrica com termos antidiagonais constantes e termos diagonais dependentes do tempo.

A função de Green agora é um expansional e o cálculo de uma representação matricial, numa situação normal é bastante complicada, pois depende das particulares funções que definem os termos diagonais.

No entanto, quando a frequência relativa entre as frequências características, como definidas no Capítulo 2, ocasionar grandes oscilações, transições entre os estados do spinor só ocorrem se existirem fases estacionárias.

Admitindo-se a existência dessas fases, calculou-se as amplitudes de transição para um sistema sujeito a duas hamiltonianas: uma dependente do tempo, e outra constante. Fez-se as seguintes hipóteses:

1. na região da primeira hamiltoniana, um estado era criado e se propagava admitindo-se a hamiltoniana constante, calculada no ponto de criação, até atravessar a região de ressonância, sofrendo nova mistura e propagando-se livremente até cruzar a região limite entre as duas hamiltonianas.
2. Na região de ressonância, a matriz de transição foi calculada mediante a utilização do método da fase estacionária.

Mostrou-se explicitamente que o mínimo da diferença entre os autovalores da hamiltoniana coincide com o ponto de fase estacionária e que na região de ressonância ocorre uma mistura máxima de estados.

Esse procedimento de análise de solução das equações de evolução temporal para sistemas acoplados via função de Green é bastante geral e pode ser aplicado nas mais diversas situações. A maior ou menor facilidade de aplicação, obviamente, depende fortemente das condições físicas impostas ao sistema.

Uma situação bastante favorável à aplicação desse método é o problema das transições ressonantes entre estados de neutrinos de sabores, eletrônicos e muônicos, quando sujeitos a interação com a matéria solar. Isto é, no contexto da solução MSW ( ref. [25] ) ao problema dos neutrinos solares.

O formalismo de função de Green aplicado nesse contexto permite se levar em conta, no cálculo das probabilidades de transição, termos oscilantes bem como se fazer uma análise da influência do ponto de criação do neutrino eletrônico no interior do Sol.

Uma extensão natural deste trabalho, seria o de analisar as transições ressonantes para o caso de três neutrinos de sabores, em continuação ao trabalho iniciado por Aquino ( ref. [16] ).

Em conclusão, acreditamos que dada a forma elegante de tratamento via função de Green, o formalismo aqui discutido pode ser aplicado numa gama bastante ampla de problemas que envolvem o estudo da evolução temporal de sistemas acoplados.

## Abstract

We discuss in this work the solutions for a general time evolution equation describing a two level system via Green function. A particular application is performed for the time evolution equations for a system of two flavor neutrinos, interacting with the ordinary solar matter.



# Bibliografia

- [1] J. Bellandi, M. M. Guzzo, J. R. Fleitas, V. M. de Aquino , *On the Matricial Representation of Exponential Operators* , Submetido ao International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, agosto, 1995
- [2] J.Bellandi, et al. J.of Physics: Math. and Gen. **25A**, (1992), 877;
- [3] M.M.Guzzo and J.Bellandi; Phys. Lett. **B294** (1992) 243 ;
- [4] J.Bellandi and M.M.Guzzo; Phys. Lett. **B317** (1993) 130 ;
- [5] M.M.Guzzo, J.Bellandi and V.M.de Aquino; Phys.Rev. **D49** (1994), 1404;
- [6] Tables of Integral Transforms - vol.1, Bateman Manuscript Project, Ed. A. Erdélyi, McGraw-Hill (1954);
- [7] M.Marcus, H. Ming ; A survey of matrix theory and matrix inequalities, Allyn and Bacon, Inc., 1964 ;
- [8] Arnold, V. I. , Equações Diferenciais Ordinárias, Trad. do russo por Dombrovsky, Ed. Mir, 1985 ;
- [9] J. Bellandi, *Funções de Green* , Notas de Física 1, Unicamp 1992;
- [10] J. Bellandi, *Funções de Green* , IST-Lisboa, 1992;
- [11] R. P. Feynman, Phys. Rev. **84** (1951), 108;
- [12] I.Fujiwara, Prog. Theor. Phys. **7**,5 (1952), 433;
- [13] van der Waerden, Algebra, vols I-II, 3rd. edition, Frederick Ungar Publ. Co., NY, 1977;
- [14] A. Erdélyi, *Asymptotic Expansions*, Dover, NY, 1956;
- [15] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*

- [16] V. M. de Aquino, *Oscilações entre três sabores de neutrinos* Tese de Doutorado, Unicamp, agosto 1995;
- [17] P. Pal, International Journal of Modern Physics A, No. 22 (1992) 5387-5459
- [18] S. J. Parke, Phys. Rev. Lett. **57**, 1275, (1986);
- [19] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics - Non relativistic theory*, Pergamon, New York, 1977;
- [20] C. Zener, Proc. R. Soc. London, **A137**, 696, (1932);
- [21] S. T. Petcov, Phys. Lett. **B 200**, 373, (1988);
- [22] T. K. Kuo, J. Pantaleone, Rev. Mod. Phys. **61**, 937 (1989);
- [23] J. Bahcall, *Neutrino Astrophysics*
- [24] J. Bahcall, *Solar Neutrinos: Where We Are, Where We Are Going*, Preprint Institute for Advanced Study, Princeton, Novembro 1.995 ( a ser publicado no *The Astrophysical Journal* );
- [25] A. Yu Smirnov, *Neutrino Properties*, I Gleb Wataghin School on High Energy Phenomenology, IFGW Unicamp, 1990